数え上げ関数からみた空間の形

吉永正彦 [*]

Abstract

数え上げ関数は様々な幾何学的情報を持っている．例えば, Weil 予想などもそのような主張だと考えることができる．数え上げ関数が「準多項式」と呼ばれるクラスの関数になる場合に, 準多項式としての複雑な情報の中に, 関連する対象の幾何学的な情報が隠れていることを, 超平面配置の特性準多項式や有理多面体の Ehrhart 準多項式に関する結果を通して紹介したい.

本稿は 2021 年 12 月 18 日〜19 日に開催された第 19 回岡シンポジウムにおける講演内容の記録である．講演機会をいただき, また素晴らしい雰囲気の講演会を準備してくださったオーガナイザーの皆様に感謝したい.

1　準多項式

非負整数 n に対して定まる有限集合 X_n の位数 $\sharp X_n$ を調べることは数え上げ組み合わせ論の基本問題である．この数え上げ関数は, n の多項式になることもあるが, 広いクラスの関数になることもある．多項式ではないが, 多項式に近い関数として, 次のような例を考えてみる.

Example 1.1. $q_{10}(n) = \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor$ を n を 10 で割った商とする．この関数は n の多項式ではないが, 場合分けをすれば, 周期的には多項式とみなすことができる.

$$q_{10}(n) = \begin{cases} \frac{n}{10}, & \text{if } n \equiv 0 \mod 10 \\ \frac{n-1}{10}, & \text{if } n \equiv 1 \mod 10 \\ \frac{n-2}{10}, & \text{if } n \equiv 2 \mod 10 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \frac{n-9}{10}, & \text{if } n \equiv 9 \mod 10 \end{cases}$$

これを一般化して, 「準多項式」を以下で定義する.

[*]大阪大学大学院理学研究科数学専攻

Definition 1.2. 関数 $F : \mathbb{Z}$ (または $\mathbb{Z}_{\geq 0}$) $\longrightarrow \mathbb{C}$ が準多項式であるとは, 周期と呼ばれる正の整数 $\rho > 0$ と多項式 $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_\rho(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して, $F(q)$ が次のようにあらわされることとする.

$$F(q) = \begin{cases} f_1(q), & \text{if } q \equiv 1 \mod \rho \\ f_2(q), & \text{if } q \equiv 2 \mod \rho \\ \quad\vdots & \qquad\quad \vdots \\ f_\rho(q), & \text{if } q \equiv \rho \mod \rho. \end{cases} \tag{1}$$

多項式 $f_1(t), \ldots, f_\rho(t)$ を構成素 (constituent) と呼ぶ.

準多項式は, 数え上げ組み合わせ論に現れる数え上げ関数のクラスとしてよく知られてものの一つである ([4, 11]). 多くの文脈では「準多項式は多項式を複雑にした対象」という位置づけで語られることが多いように思われる. 本当は多項式関数であってほしいところだが, 残念ながらそうなってはおらず, 準多項式で我慢するしかない, というような妥協の産物とも言えるかもしれない. しかしながら最近の研究で, 準多項式特有の複雑さの中に, 対象が持つ様々な性質が隠れていることが分かってきた. 本項の目的は, 準多項式の構成素に関する最近の研究をいくらか紹介することである.

2 超平面配置の特性準多項式

ベクトル空間, 射影空間, アフィン空間などの余次元 1 の部分空間を超平面という. 超平面の (有限枚の) 集合は**超平面配置**と呼ばれ, 様々な数学の分野で現れる [10]. その最も重要な不変量の一つに**特性多項式**と呼ばれるものがあるが, 本節ではその精密化である**特性準多項式**を導入する. 特性準多項式は, 整数係数の一次式で定義された超平面たちを対象としているが, 超平面配置の数え上げ組合せ論的側面において特に重要な対象である.

$q \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. 整数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ に対して, それを係数に持つ一次式が定める超平面

$$H_{\boldsymbol{a}} := \{(x_1, \ldots, x_\ell) \mid a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell = 0\}$$

が定まるが, これを $\mod q$ することで得られる $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の "超平面" を

$$\overline{H}_{\boldsymbol{a}} := \{(x_1, \ldots, x_\ell) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \mid a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell \equiv 0 \mod q\}$$

ベクトルたちのリスト $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_n}\} \subset \mathbb{Z}^\ell$ に対して, それが定める $\mathrm{mod}\ q$ 補集合を

$$M(\mathcal{A}, q) := (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_{\boldsymbol{a_i}}.$$

と記す. $M(\mathcal{A}, q)$ は有限集合であり, その位数 $\#M(\mathcal{A}, q)$ が q にどのように依存するのかは基本的な問題であるが, それが準多項式 (周期的な多項式) としてふるまうことが知られている.

Theorem 2.1. *(Kamiya-Takemura-Terao [7]) 上の仮定の下, $\#M(\mathcal{A}, q)$ は q に関する準多項式 (特性準多項式) である. さらに, 周期を $\rho > 0$, 構成素を $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_\rho(t) \in \mathbb{Z}[t]$ としたとき, 次の **GCD** 性を持つ*

$$(i, \rho) = (j, \rho) \Longrightarrow f_i(t) = f_j(t),$$

上の結果は, Constituents $f_i(t)$ は, ρ との最大公約数 (i, ρ) にのみ依存することを意味しており, 準多項式の中でも特殊な準多項式であることがわかる. Athanasiadis [2, 3] により, prime constituent $f_1(t)$ は, 超平面配置 $\mathcal{A}$ の共通部分として定まる部分空間たちのなすポセットの特性多項式 $\chi(\mathcal{A}, t) \in \mathbb{Z}[t]$ に等しいことが知られている. 特性多項式は超平面配置の最も重要な不変量と考えられている. 例えば, $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合の Poincaré 多項式が, 特性多項式 $\chi(\mathcal{A}, t)$ を使って

$$(-t)^\ell \cdot \chi(\mathcal{A}, \frac{-1}{t}) \tag{2}$$

と表されることが知られている (Orlik-Solomo). つまり, 特性多項式の係数が補集合の Betti 数と等しいことがわかる.

Example 2.2. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^2$, つまり, 整数係数一次式で表された三本の直線 $y = 0, x + y = 0, 3x + y = 0$ を考える. 特性準多項式を計算すると, $\rho = 6$ となり,

$$\#M(\mathcal{A}, q) = \begin{cases} q^2 - 3q + 2, & \text{if } q \equiv 1, 5 \mod 6 \\ q^2 - 3q + 3, & \text{if } q \equiv 2, 4 \mod 6 \\ q^2 - 3q + 4, & \text{if } q \equiv 3 \mod 6 \\ q^2 - 3q + 5, & \text{if } q \equiv 0 \mod 6. \end{cases}$$

となる.

特性準多項式の構成素のうち, ρ と互いに素な i に対しては $f_i(t) = f_1(t)$ となるので, 特性多項式 $\chi(\mathcal{A}, t)$ に等しい. 他の構成素がどのような意味を持つのか問うのは自然な問題である. 最近の Y. Liu, T. N. Tran 氏らとの共同研究で, 特性準多項式の構成素はトーラス配置のトポロジーと密接にかかわることが分かってきた. ここで「トーラス配置」を考えるというのは, 一言で述べると, 整数係数の多項式を $\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{C}^\times$ して考えることである. 上の例をつかって具体的に述べると, トーラス $(\mathbb{C}^\times)^2 \ni (t_1, t_2)$ 内で, $t = 1, t_1t_2 = 1, t_1^3t_2 = 1$ を考えることである. こうして得られるトーラス配置の補集合を $M(\mathcal{A}, \mathbb{C}^\times)$ と表すことにする. 超平面配置の特性多項式とは対照的に, 一番退化した構成素 $f_\rho(t)$ が $M(\mathcal{A}, \mathbb{C}^\times)$ の Poincarè 多項式と関係していることが分かった.

Theorem 2.3. *([8, 13])*

1. $M(\mathcal{A}, \mathbb{C}^\times)$ の *Poincarè* 多項式は以下で与えられる.
$$(-t)^\ell \cdot f_\rho(-\frac{1+t}{t}). \tag{3}$$
2. このトーラス配置から得られる部分トーラスたちの中で, *k-torsion point* を含む部分トーラスたちのなすポセットの特性多項式が $f_k(t)$ である.

Remark 2.4. ポアンカレ多項式を表す公式 (2) と (3) を比較してみると, 多項式に代入する有理式の分子だけが異なる. 一方は 1 で, 他方は $1+t$ である. これらはそれぞれ $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}^\times$ のポアンカレ多項式である. これは偶然ではなく, $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^\times$ よりも一般に可換リー群 G に対して, G-特性多項式というものが定義され, G が非コンパクトの時は, 同様の公式が示される. $f_1(t)$, $f_\rho(t)$ はそれぞれ, $G = \mathbb{C}, \mathbb{C}^\times$ に対応する G-特性多項式となる. 詳細は [8] 参照.

3 格子多面体を平行移動した多面体の Ehrhart 準多項式

有理多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ に対して, t 倍に拡大した多面体上の格子点の数を

$$L_P(t) := \#(tP \cap \mathbb{Z}^n)$$

とおく. この関数 $L_P(t)$ は, 非負整数 t に対して, 準多項式 (Ehrhart 準多項式) となることが知られている ([4]). 多面体 P の頂点の座標の分母の最小公倍数が Ehrhart 準多項式の周期となることが知られている (ただし, 最小周期とは限らない). 特に, P が格子多面体の場合は, $L_P(t)$ は t の多項式である. Ehrhart(準) 多項式は数え上げ組み合わせ論における重要な研究対象で現在でも活発に研究されている ([4, 11]). また, 組み合わせ論以外でも, トーリック多様体のヒルベルト多項式とも関係するなど重要な役割を果たしている.

前節で紹介したが, 超平面配置の特性準多項式については, いつでも GCD 性を持つ. 一方, Ehrhart 準多項式の場合は一般には ρ 個の異なる構成素が現れる. しかしまれに GCD 性を持つ多面体も存在する. 例えば, Suter([12]) はルート系の基本アルコーブの Ehrhart 準多項式の計算を行っており, その表から GCD 性が観察される. (なお, Suter の計算の時点では GCD 性の由来は明らかでなかったのだが, [14] で超平面配置の特性準多項式の GCD 性に帰着されることが分かった.) どのような有理多面体に対して, Ehrhart 準多項式が GCD 性を持つか? という問いは自然な問いであるが, 知られていることは少ない. 上にあげた, ルート系の基本アルコーブや, 下で述べる格子 Zonotope の平行移動以外にはほとんど知られていないように思われる.

本節の主結果を述べるために, GCD 性以外にもう一つ準多項式に関する定義をする.

Definition 3.1. 準多項式 (1) が**対称**であるとは, 構成素が $f_i(t) = f_{\rho-i}(t)$ $(i = 1, \ldots, \rho-1)$ を満たすこととする.

定義から明らかに, GCD 性を持つ準多項式は対称である.

Example 3.2. 多面体 P_1, P_2, P_3 を

- $P_1 = \frac{1}{9} \cdot [0,1]^3$ (一辺の長さが $\frac{1}{9}$ の立方体)
- $P_2 = (\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3})^t + \mathrm{Conv}\{\pm e_i \mid i = 1,2,3\}$ (正 8 面体 $\mathrm{Conv}\{\pm e_i \mid i = 1,2,3\}$ を有理ベクトルで平行移動)
- $P_3 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3})^t + [0,1]^3$ (単位立方体を有理ベクトルで平行移動)

とする. この時, Ehrhart 準多項式 $L_{P_1}(t)$, $L_{P_2}(t)$, and $L_{P_3}(t)$ はいずれも周期は 9 である. $L_{P_1}(t)$ の構成素は $f_k(t) = \left(\frac{t+9-k}{9}\right)^3$ $(k = 0, 1, \ldots, 8)$ となり, 他の二つは以下のようになる.

$$L_{P_2}(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}t, & (t \equiv 1, 8 \mod 9), \\ \frac{4}{3}t^3 + \frac{2}{3}t, & (t \equiv 2, 7 \mod 9), \\ \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{2}{3}t, & (t \equiv 3, 6 \mod 9), \\ \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}t, & (t \equiv 4, 5 \mod 9), \\ \frac{4}{3}t^3 + 2t^2 + \frac{8}{3}t + 1, & (t \equiv 9 \mod 9), \end{cases}$$

$$L_{P_3}(t) = \begin{cases} t^3 & (t \equiv 1, 2, 4, 5, 7, 8 \mod 9), \\ t^3 + t & (t \equiv 3, 6 \mod 9), \\ (t+1)^3 & (t \equiv 9 \mod 9). \end{cases}$$

$L_{P_1}(t)$ は 9 個の互いに相異なる構成素が現れるが, $L_{P_2}(t)$ は対称性を持ち, $L_{P_3}(t)$ は GCD 性を持つことが観察される.

これらの性質が多面体の形状の関係を述べるのが本節の主結果である.

Theorem 3.3. ([6]) $P \subset \mathbb{R}^d$ を d-次元格子凸多面体とするとき, 次は同値である.

(1a) P は中心対称多面体である.

(1b) 任意の有理ベクトル $v \in \mathbb{Q}^d$ に対して, $L_{v+P}(t)$ は対称な準多項式である.

Theorem 3.4. ([6]) $P \subset \mathbb{R}^d$ を d-次元格子凸多面体とするとき, 次は同値である.

(2a) P はゾノトープである.

(2b) 任意の有理ベクトル $v \in \mathbb{Q}^d$ に対して, $L_{v+P}(t)$ は GCD 性を持つ準多項式である.

つまり, (任意の有理ベクトル $v \in \mathbb{Q}^d$ による平行移動の)Ehrhart 準多項式が対称性や GCD 性を持つことが, 元の多面体 P の中心対称性やゾノトープであることを特徴づけているのである.

証明は以下の部分からなる. (2a)$\Longrightarrow$(2b) は最近の Ardila-Beck-McWhirter 等の結果 [1] を使う. 彼らは格子 Zonotope の Ehrhart 多項式の Stanley による記述の一般化を得ており, それから (2a)$\Longrightarrow$(2b) が直ちに従う.

(1a)$\Longrightarrow$(1b) は, 格子多面体を有理ベクトルで平行移動した多面体の Ehrhart 準多項式の構成素の一般的な記述を必要とする. Ehrhart(準) 多項式 $L_P(t)$ の変種として, 多面体 P とベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して, P を t 倍してから $\boldsymbol{v}$ で平行移動してその中にある格子点を数える関数

$$L_{(P,\boldsymbol{v})}(t) := \#(\boldsymbol{v} + tP) \cap \mathbb{Z}^n$$

を考える. この時, 次が得られる.

Lemma 3.5. *([6])* 格子多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ と任意の実ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $L_{(P,\boldsymbol{v})}(t)$ は t の多項式である.

この多項式は, 平行移動した格子多面体の Ehrhart 準多項式の構成素を記述するにに便利である.

Lemma 3.6. *([6])* P を格子多面体, $\boldsymbol{v}$ を有理ベクトルとすると, $P + \boldsymbol{v}$ の *Ehrhart* 準多項式の k-番目の構成素は $L_{(P,k\boldsymbol{v})}(t)$ である.

これから (1a)$\Longrightarrow$(1b) を導くのは難しくない.

逆方向 (b)$\Longrightarrow$(a) の証明は (1), (2) ともに単純でなく, Minkowski や McMullen にさかのぼる, 対称多面体やゾノトープの特徴づけを, 格子点の数え上げの言葉に翻訳しなおすことでなされる. 具体的には, 中心対称でない多面体や Zonotope ではない多面体に対して, 平行移動ベクトル $\boldsymbol{v}$ をうまく見つけて, $L_{(P,\boldsymbol{v})}(t) \neq L_{(P,-\boldsymbol{v})}(t)$, $L_{(P,\boldsymbol{v})}(t) \neq L_{(P,2\boldsymbol{v})}(t)$ ($\boldsymbol{v}$ の分母は奇数) となるようにする. 詳細は省略する.

例 3.2 の P_2, P_3 はそれぞれ中心対称, Zonotope であることに注意する. 主結果は, 多面体の形状に関する性質 (中心対称性, Zonotope 性) と Ehrhart 準多項式の性質 (対称性, GCD 性) の間に, 単純な対応関係が存在することを意味している. 下の表の一段目と二段目は, 格子多面体を有理ベクトルで平行移動した多面体, というクラスでは, 見事に対応していることがわかる.

多面体の種類	ゾノトープ	$\subset$	中心対称多面体	$\subset$	一般の多面体
準多項式の性質	GCD 性	$\subset$	対称性	$\subset$	一般の準多項式

4　これからの問題

これまで, 格子多面体の Ehrhart 多項式の研究は膨大になされてきた．有理多面体の Ehrhart 準多項式についても, period collapse 現象を中心に, いくらか研究されてはきたが, 一般論を超えてどのような方向を目指すべきか, というのはあまり明確ではなかったように思われる．今回の研究から, 「格子多面体を有理ベクトルで平行移動して得られる有理多面体」, というのは注目に値するクラスではないかと思われる．また, 一般の有理多面体において, いつ Ehrhart 準多項式が対称性や GCD 性を持つか? というのも興味深い問題である．既に述べたが, Suter [12] がルート系の基本アルコーブの Ehrhart 準多項式記述した際に, GCD 性が見て取れたが, それは実は超平面配置の特性準多項式の GCD 性に由来するものであった [14]. 定理 3.4 からわかる, 格子 Zonotope の平行移動の Ehrhart 準多項式も, 超平面の特性準多項式としての解釈を持つだろうか? 様々な興味深い問題が未解決である.

Acknowledgement. 本稿のもとになった研究は, 科研費 JP25400060, JP15KK0144, JP18H01115 の助成を受けたものです.

References

[1] F. Ardila, M. Beck, J. McWhirter, The Arithmetic of Coxeter Permutahedra. *Rev. Acad. Colombiana Cienc. Exact. Fís. Natur.* **44** (2020), no. 173, 1152-1166.

[2] C. A. Athanasiadis, Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. *Adv. Math.* **122** (1996), no. 2, 193–233.

[3] C. A. Athanasiadis, Extended Linial hyperplane arrangements for root systems and a conjecture of Postnikov and Stanley. J. Algebraic Combin. 10 (1999), no. 3, 207–225.

[4] M. Beck and S. Robins, Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra. Undergraduate Texts in Mathematics. *Springer, New York,* 2007. xviii+226 pp.

[5] M. D'Adderio, L. Moci, Arithmetic matroids, the Tutte polynomial and toric arrangements. *Adv. in Math.* **232** (2013) 335-367.

[6] C. de Vries, M. Yoshinaga, Ehrhart quasi-polynomials of almost integral polytopes. arXiv:2108.11132

[7] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. *J. Algebraic Combin.* **27** (2008), no. 3, 317–330.

[8] Y. Liu, T. N. Tran, M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. IMRN, Vol. 2021, No. 1, pp. 152-190.

[9] L. Moci, A Tutte polynomial for toric arrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), no. 2, 1067-1088.

[10] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xviii+325 pp.

[11] R. Stanley, Enumerative combinatorics. Volume 1. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2012. xiv+626 pp.

[12] R. Suter, The number of lattice points in alcoves and the exponents of the finite Weyl groups. *Math. Comp.* **67** (1998), no. 222, 751–758.

[13] T. N. Tran, M. Yoshinaga, Combinatorics of certain abelian Lie group arrangements and chromatic quasi-polynomials. *Journal of Combinatorial Theory, Series A.* **165** (2019) 258-272.

[14] M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. Tohoku Math. J. 70 (2018) 39-63.