複素シンプレクティック特異点の変形と双有理幾何

並河良典

京大数理研

December 19, 2021

クライン特異点と同時特異点解消

3 次元アファイン空間の超曲面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ で f が次のいずれかの形のものを, **クライン特異点** とよぶ.

$$(A_r) : x^{r+1} + y^2 + z^2 \; (r \geq 1)$$

$$(D_r) : x^{r-1} + xy^2 + z^2 \; (r \geq 4)$$

$$(E_6) : x^4 + y^3 + z^2$$

$$(E_7) : x^3y + y^3 + z^2$$

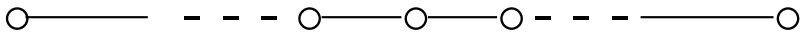
$$(E_8) : x^5 + y^3 + z^2$$

S は, 原点でのみ特異点をもつ代数曲面. 非特異部分 $S - \{0\}$ には, 正則シンプレクティック形式が存在:

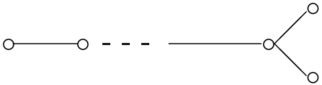
$$\omega_S := \mathrm{Res}(dx \wedge dy \wedge dz/f(x, y, z))$$

極小特異点解消 $\pi : \tilde{S} \to S$ をとる. $\pi^*\omega_S$ は $\tilde{S}$ 上の正則シンプレクティック形式 $\omega_{\tilde{S}}$ に拡張. 例外曲線 $\pi^{-1}(0)$ は次の双対図形をもつ:

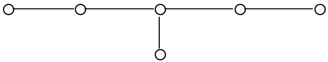
(A_r): 頂点の個数は r 個



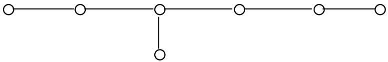
(D_r): 頂点の個数は r 個



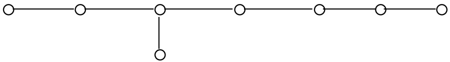
(E_6)



(E_7)



(E_8)



変形

(X,p) を複素解析空間の芽に対して, 平坦射 $f:(\mathcal{X},p)\to(T,0)$ で $f^{-1}(0)=(X,p)$ となるものを, (X,p) の **変形** とよぶ.
さらに, f が次の性質 (*) をもつとき, (X,p) の **半普遍変形** とよぶ.

(*) (X,p) の任意の変形 $g:(\mathcal{Y},p)\to(U,0)$ に対して, 射 $\phi:(U,0)\to(T,0)$ が存在して, g は f を, ϕ によって引き戻してえられる. さらに, $d\phi: T_0U\to T_0T$ は一意的である:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y},p) & \xrightarrow{\cong} & (\mathcal{X},p)\times_{(T,0)}(U,0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U,0) & \xrightarrow{id} & (U,0) \end{array} \tag{1}$$

Theorem 1.1

(Grauert, Tyurina, ...) 孤立特異点 (X,p) に対して半普遍変形が存在する.

例. A_r-型クライン特異点 $S: y^2+z^2+x^{r+1}=0$ に対して,

$$\mathcal{X} := \{(x,y,z,t_1,\dots,t_r) \in \mathbf{C}^{r+3} \mid y^2+z^2+x^{r+1}+\sum_{1\le i\le r} t_i x^{r-i}=0\}$$

と置くと, $(\mathcal{X},0) \to (\mathbf{C}^r,0)$ は S の 半普遍変形である.

$x^{r+1}+t_1x^{r-1}+t_2x^{r-2}+\dots+t_{r-1}x+t_r=$
$(x-s_1)(x-s_2)\cdots(x-s_{r+1})$

と書く. ただし, $s_1+\dots+s_{r+1}=0$
すなわち, $V := \{(s_1,\dots,s_{r+1}) \in \mathbf{C}^{r+1} \mid s_1+\dots+s_{r+1}=0\}$ に対して,

$$\mathcal{X}' := \{(x,y,z,s_1,\dots,s_{r+1}) \in \mathbf{C}^3 \times V \mid y^2+z^2+\prod(x-s_i)=0\}$$

と置く. 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ V \arrow[r] & \mathbf{C}^r \end{tikzcd} \tag{2}$$

$\mathcal{X}' = \{y^2 + z^2 + \prod(x - s_i) = 0\}$
$1 \leq i < j \leq r + 1$ に対して

$$L_{ij} := \{(s_1, ..., s_{r+1}) \in V \mid s_i = s_j\}$$

$$\mathcal{D} := \bigcup L_{ij}$$

$s \in \mathcal{D}$ 上のファイバー $\mathcal{X}'_s$ は特異点をもつ.
$\mathcal{X}' \to V$ は同時特異点解消をもつ: $\mathcal{X}'$ 上の (Cartier でない) Weil 因子で何回かブローアップ (例: $(y - iz, x - s_1)$ でブローアップ, ...)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{id} & V \end{array} \tag{3}$$

V の各点 s に対して, $\pi_s : \mathcal{Y}_s \to \mathcal{X}'_s$ は極小特異点解消. 同時特異点解消の取り方は一意的でない.

超平面配置とルート系
$V(\mathbf{R}) := V \cap \mathbf{R}^{r+1}$. $\mathbf{R}^{r+1}$ の標準的内積 (,) を $V(\mathbf{R})$ に制限.

$$\alpha_{ij} := (0, .., 0, 1, 0, ..., 0, -1, 0, ..., 0), \ (1 \leq i < j \leq r+1)$$

$$\Phi := \{\alpha_{ij}, -\alpha_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq r+1}$$

は A_r-型ルート系.

$$L_{ij} \cap V(\mathbf{R}) = \{s \in V(\mathbf{R}) \mid (s, \alpha_{ij}) = 0\}$$

は, α_{ij} に関する鏡映面. $V(\mathbf{R})$ の超平面 $\{L_{ij} \cap V(\mathbf{R})\}$ は, $V(\mathbf{R})$ を有限個の部屋 (chamber) に分割する. 部屋の個数 $= (r+1)!$.

$\sharp\{$ 部屋 $\} = \sharp\{$ 同時特異点解消 $\}$

これらは偶然ではない！

リー環を用いた半普遍変形と同時特異点解消の構成

G: 複素単純代数群, $\mathfrak{g} := Lie(G)$

G は $\mathfrak{g}$ に随伴的に作用. この作用の軌道のことを, 随伴軌道とよぶ. 特に, べき零元からなる随伴軌道のことを, べき零軌道とよぶ. $\mathfrak{g}$ のべき零元全体からなる代数多様体をべき零錐とよび, $\mathcal{N}$ で表す. $\mathcal{N}$ は有限個のべき零軌道の和である. べき零軌道 O^r, O^{sr} で次の性質をもつものが存在する:

$$\mathcal{N} = \bar{O}^r, \quad \mathcal{N} - O^r = \bar{O}^{sr}$$

O^r を正則べき零軌道, O^{sr} を副正則べき零軌道とよぶ.

$$\dim O^{sr} = \dim \mathcal{N} - 2$$

$\mathfrak{g}$ のべき零元 x にたいして, $sl(2)$-トリプル $\{x, y, h\} \subset \mathfrak{g}$ を取り,

$$\mathcal{X} := x + \mathrm{Ker}(ad\ \ y) \subset \mathfrak{g}$$

と置き, x に対する Slodowy 切片とよぶ. Slodowy 切片は, x を含むべき零軌道 O に対する横断片である:

$$T_x\mathfrak{g} = T_xO \oplus T_x\mathcal{X} \quad (= \mathrm{Im}(ad\ x) \oplus \mathrm{Ker}(ad\ y))$$

$$\mathfrak{g}//G := \mathrm{Spec}\mathbf{C}\left[\mathfrak{g}\right]^G.$$

商写像を $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}//G$ とする．G の Borel 部分群 B_0 を固定して $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}_0$ となるように Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を取る．W をワイル群とすると，Chevalley の制限定理から，$\mathfrak{h}/W \cong \mathfrak{g}//G$.

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \{(z, B) \mid B : \mathrm{Borel\ subgroup\ of\ } G,\ z \in \mathfrak{b}\}$$

と置く．次の可換図式をえる:

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\tilde{\chi}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\chi"'] \\ \mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{h}/W \end{tikzcd} \tag{4}$$

$\tilde{\chi}$ の定義．B は B_0 と共役: $B := gB_0g^{-1}$, $\exists g \in G$. $z \in g\mathfrak{b}_0g^{-1}$. すなわち $g^{-1}zg \in \mathfrak{b}_0$. 直和分解 $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ における，$g^{-1}zg$ の第 1 成分への射影を $(g^{-1}zg)_1$ とする．$\tilde{\chi}(z, B) := (g^{-1}zg)_1$.

例. $\mathfrak{g} = sl(n+1)$, $G = SL(n+1, \mathbf{C})$ とする. 行列 $X := (x_{ij}) \in sl(n+1)$ に対して, 固有多項式

$$\det(tI_{n+1} - X) = t^{n+1} + c_2(X)t^{n-1} + c_3(X)t^{n-2} + ... + c_{n+1}(X)$$

を考える. $c_i(X)$ は, x_{ij} に関して, i 次の斉次多項式である. このとき

$$\mathbf{C}[\mathfrak{g}]^G = \mathbf{C}[c_2, ..., c_{n+1}]$$

なので, $\mathfrak{g}//G = \mathbf{C}^n$.
G のボレル部分群 B は, $\mathbf{C}^{n+1}$ の旗

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset \mathbf{C}^{n+1}$$

に対応する. さらに, $z \in sl(n+1)$ に対して, $z \in \mathbf{b}$ であることと, z が旗を保つことは同値.

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{(z, F_\cdot) \mid F : \mathrm{flag},\ \ z(F_i) \subset F_i,\ \forall i\}$$

旗 $F.$ に対して, $F_i = < e_1, ..., e_i >$ となるように, $\mathbf{C}^{n+1}$ の基底 $e_1, ..., e_{n+1}$ をとり, z を行列表示する:

$$z = \begin{pmatrix} s_1 & * & * & \cdots & \cdots \\ 0 & s_2 & * & * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & s_n & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\sum s_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\tilde{\chi}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\chi"'] \\ \mathbf{C}^n \arrow[r] & \mathbf{C}^n \end{tikzcd} \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd} (z, F.) \arrow[r] \arrow[d] & z \arrow[d] \\ (s_1, ..., s_n) \arrow[r] & (c_2(z), ..., c_n(z)) \end{tikzcd} \tag{6}$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\Pi} & \mathfrak{g} \\ {\scriptstyle\tilde{\chi}}\downarrow & & {\scriptstyle\chi}\downarrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \end{array} \tag{7}$$

Slodowy 切片 $\mathcal{X} \subset \mathfrak{g}$ に対して, $\mathcal{Y} := \Pi^{-1}(\mathcal{X})$ と置く:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_{\mathfrak{h}/W} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{id} & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \end{array} \tag{8}$$

Theorem 1.2

(Brieskorn)　$\mathfrak{g}$ を A, D, E-型複素単純リー環, $\mathcal{X}$ を副正則べき零元に対する *Slodowy* 切片とする. このとき, $\mathcal{X} \to \mathfrak{h}/W$ は, 対応する型のクライン特異点 S の半普遍変形を与え, 上の図式は, 同時特異点解消を与える.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ のルート系を Φ とする．ルート $\alpha \in \Phi$ を $\mathfrak{h}^*$ の元とみなす．

$$L_\alpha := \{s \in \mathfrak{h} \mid \alpha(s) = 0\}, \ \mathcal{D} := \cup_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

と置く．$\mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_{\mathfrak{h}/W} \mathfrak{h}$ と置くと，$\mathcal{X}' \to \mathfrak{h}$ は，クライン特異点 S の変形族．このとき，

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathfrak{h} \mid \mathcal{X}'_s : \text{singular}\}.$$

ワイル群 W は $\mathfrak{h}$ に作用する．$w \in W$ に対して，$\mathcal{Y}_w$ をファイバー積として定義する:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Y}_w & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{X} \times_{\mathfrak{h}/W} \mathfrak{h} & \xrightarrow{id \times w} & \mathcal{X} \times_{\mathfrak{h}/W} \mathfrak{h} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{h} & \xrightarrow{w} & \mathfrak{h}
\end{array} \tag{9}$$

$\mathcal{Y}_w \to \mathcal{X}'$ は $\mathcal{X}' \to \mathfrak{h}$ の同時特異点解消を与える．異なる同時特異点解消の個数は全部で，$|W|$ 個．

シンプレクティック代数多様体

クライン特異点 S の性質

- 非特異部分 S_{reg} の上に正則 シンプレクティック 2-形式 ω が存在.
- 良い $\mathbf{C}^*$-作用をもつ: すなわち, $S = \mathrm{Spec}\, R$ と書いたとき, R は正の次数つき環になる:

$$R = \oplus_{i \geq 0} R_i, \quad R_0 = \mathbf{C}$$

例: E_8-型特異点 $x^5 + y^3 + z^2 = 0$ には, $\mathbf{C}^*$ が, $x \to t^6 x$, $y \to t^{10} y$, $z \to t^{15} z$ で作用する.

これらの性質を使って, クライン特異点の概念を高次元化する:

定義 1 (Beauville). X を偶数次元 $2d$ の複素正規代数多様体とする. X の非特異部分 X_{reg} 上に正則 2-形式 ω が存在して, 次の 2 条件を満たすとき, (X, ω) をシンプレクティック代数多様体とよぶ:
(i) ω はシンプレクティック形式である. つまり, $d\omega = 0$ 　であり, $\wedge^d \omega$ は至る所消えない.
(ii) X の特異点解消 $f : Y \to X$ をとると, $f^{-1}(X_{reg})$ 上の 2-形式 $f^*\omega$ は Y 上の 2-形式 ω_Y に延長可能である.

定義 2. シンプレクティック代数多様体 (X, ω) が次の性質を持つとき, 錐的シンプレクティック多様体とよぶ:
(i) X はアファイン多様体である: $X = \mathrm{Spec}\, R$.
(ii) X は良い $\mathbf{C}^*$-作用をもつ. すなわち, R は正に次数付けられた環である: $R = \oplus_{i \geq 0} R_i$, $R_0 = \mathbf{C}$
さらに, ω は, この $\mathbf{C}^*$-作用に関して, 斉次的である: $t^*\omega = t^l\omega$, $l \in \mathbf{Z}$.

注意. $m := \oplus_{i > 0} R_i$ は R の極大イデアルであり, 対応する X の点 0 は, $\mathbf{C}^*$-作用のただ一つの固定点である.

例 1 (べき零軌道). G を複素半単純代数群, O を複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のべき零軌道とする. O 上には, Kirillov-Kostant 形式とよばれる正則シンプレクティック形式が存在:
$\alpha \in O$ に対して, 全射

$$G \to O, \;\; g \to Ad_g(\alpha)$$

が存在. このとき接空間の全射が誘導される:

$$T_1 G := \mathfrak{g} \to T_\alpha O, \;\; x \to \bar{x}$$

$\bar{x}, \bar{y} \in T_\alpha O$ に対して,

$$\omega_\alpha(\bar{x}, \bar{y}) := \kappa(\alpha, [x, y])$$

と定義すると, ω_α は $T_\alpha O$ 上の非退化反対称形式になる. $\omega := \{\omega_\alpha\}$ は, O 上の正則シンプレクティック形式を与える. $\bar{O}$ を O の $\mathfrak{g}$ における閉包とする. $\bar{O}$ はアファイン代数多様体. $\bar{O}$ の正規化を $\tilde{O}$ とすると, $(\tilde{O}, \omega)$ はシンプレクティック代数多様体である.
$\bar{O} \subset \mathfrak{g}$ は, $\mathfrak{g}$ のスカラー $\mathbf{C}^*$-作用で閉じているので, $\tilde{O}$ は $\mathbf{C}^*$-作用をもつ. このとき $wt(\omega) = 1$.
したがって, $(\tilde{O}, \omega)$ は錐的シンプレクティック多様体である.

例 2 (べき零軌道の横断片). 複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のべき零元 x とり, $\mathcal{X}$ を x に対する Slodowy 切片とする:

$$\mathcal{X} := x + \mathrm{Ker}(ad\ y) \subset \mathfrak{g}$$

$\mathfrak{g}$ のべき零錐を $\mathcal{N}$ として,

$$X := \mathcal{X} \cap \mathcal{N}$$

とおく. $X \subset \mathcal{N}$ は x を通るべき零軌道 O に対する横断片である.

$$X_{reg} = \mathcal{X} \cap \mathcal{N}_{reg}$$

$\mathcal{N}$ は正則べき零軌道 O^r の閉包であった．実は, $\mathcal{N}_{reg} = O^r$. ω_{O^r} を O^r の Kirilliv-Kostant 形式とする．このとき, $\omega := \omega_{O^r}|_{X_{reg}}$ は, X_{reg} の正則シンプレクティック形式になる．

次に, Slodowy 切片 $\mathcal{X}$ に対して, x が固定点になるような $\mathbf{C}^*$-作用を導入する．

$sl(2)$-トリプル $\{x, y, h\}$ から決まるリー環の射 $sl(2) \to \mathfrak{g}$ は, $SL(2) \to G$ を誘導する．G は随伴的に $\mathfrak{g}$ に作用するので, $SL(2)$ が $\mathfrak{g}$ に作用する．h は, $\mathbf{C}^* \subset SL(2)$ を決めるので, $\mathbf{C}^*$ が $\mathfrak{g}$ に作用する．この作用を

$$\lambda : \mathbf{C}^* \to GL(\mathfrak{g})$$

と書く．一方, $\mathfrak{g}$ 上のスカラー作用を

$$\sigma : \mathbf{C}^* \to GL(\mathfrak{g})$$

で表す．このとき, $t \in \mathbf{C}^*$ に対して,

$$\rho(t) := \sigma(t^2) \circ \lambda(t^{-1})$$

ρ によって, $\mathbf{C}^*$ は $\mathcal{X}$ に作用し, X にも作用する．

$x \in \mathcal{X}$ はこの $\mathbf{C}^*$-作用の唯一の固定点である. (X, ω) は錐的シンプレクティック多様体となり, $wt(\omega) = 2$ である.

例 3 (トーリック超ケーラー多様体). $T^m := (\mathbf{C}^*)^m$ を m 次元代数トーラスとする. T^m は $z = (z_1, ..., z_m) \in \mathbf{C}^m$ に

$$(z_1, ..., z_m) \to (t_1 z_1, ..., t_m z_m)$$

で作用. $\mathbf{C}^m$ の双対空間 $(\mathbf{C}^m)^*$ には

$$(w_1, ..., w_m) \to (t_1^{-1} w_1, ..., t_m^{-1} w_m)$$

で作用する. 整数値 $d \times m$-行列 $A = (a_{ij})$ で階数が d のものを取る. 代数トーラスの準同型 $T^d \to T^m$ を

$$(t_1, ..., t_d) \to (t_1^{a_{11}} t_2^{a_{21}} \cdot \cdot t_d^{a_{d1}}, ..., t_1^{a_{1m}} t_2^{a_{2m}} \cdot \cdot t_d^{a_{dm}})$$

で定義する. これによって, T^d が $\mathbf{C}^m \oplus (\mathbf{C}^m)^*$ に作用する.

$\mathbf{C}^m \oplus (\mathbf{C}^m)^*$ 上のシンプレクティック形式

$$\tilde{\omega} := \sum_{1 \le i \le m} dw_i \wedge dz_i$$

に関して, この T^d-作用はハミルトン作用になっている. A の i 次列ベクトルを $\mathbf{a}_i$ とすると, モーメント写像は

$$\mu : \mathbf{C}^m \oplus (\mathbf{C}^m)^* \to \mathbf{C}^d, \quad (z_1, ..., z_m, w_1, ..., w_m) \to \sum_{1 \le i \le m} z_i w_i \mathbf{a}_i$$

で与えられる. シンプレクティック還元

$$X := \mu^{-1}(0) // T^d$$

の非特異部分には, $\tilde{\omega}$ から決まるシンプレクティック形式 ω がのっている. さらに, $\mathbf{C}^m \oplus (\mathbf{C}^m)^*$ には $\mathbf{C}^*$ が,

$$(z_1, ..., z_m, w_1, ..., w_m) \to (tz_1, ..., tz_m, tw_1, ..., tw_m).$$

で作用する. これにより $\mathbf{C}^*$ は X にも作用する.
(X, ω) はこの $\mathbf{C}^*$-作用に関して, 錐的シンプレクティック多様体になる.
$wt(\omega) = 2$

ポアソン変形

(X, ω) をシンプレクティック代数多様体とする．ω は，X_{reg} 上にポアソン構造を定義する．すなわち ω は，同一視 $\Theta_{X_{reg}} \cong \Omega^1_{X_{reg}}$ を与える．両辺のウエッジ積をとると，同一視 $\wedge^2\Theta_{X_{reg}} \cong \Omega^2_{X_{reg}}$ をえる．この対応で，ω に対応する 2-ベクトルを θ とする．$f, g \in \mathcal{O}_{X_{reg}}$ にたいして，

$$\{f, g\} := \theta(df \wedge dg) \in \mathcal{O}_{X_{reg}}$$

と定義することにより，X_{reg} はポアソン代数多様体になる．X は正規多様体なので，X_{reg} 上のポアソン括弧積は，X 上の括弧積に一意的に拡張．これにより，X もポアソン代数多様体になる．すなわち，

$$\{\ ,\ \} : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$$

で，次の性質を持つものが存在する．

- $\{\ ,\ \}$ は，反対称 $\mathbf{C}$-双線形形式．
- (bi-derivation) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$，
  $\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}$．
- (Jacobi identity) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$．

シンプレクティック代数多様体に対しては, 通常の変形を考えるかわりに, ポアソン変形を考えることが有効である.

定義 (ポアソン変形) (Ginzburg-Kaledin). $(X, \{\ ,\})$ をポアソン代数多様体とする. $0 \in T$ を点つき $\mathbf{C}$-概型とする. このとき, $(\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \to T$ は, 次の性質をもつとき, $(X, \{\ ,\})$ の T 上のポアソン変形とよぶ.

- $\mathcal{X} \to T$ は平坦全射であり, $0 \in T$ に対して, 同型 $\phi : X \cong \mathcal{X}_0$ が存在
- $\{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}$ は, $\mathcal{O}_T$-線形なポアソン括弧積で, $\phi : (X, \{\ ,\ \}) \cong (\mathcal{X}_0, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_0})$ はポアソン代数多様体の同型射

T 上の 2 つのポアソン変形 $(\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}})$ と $(\mathcal{X}', \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}'})$ が同値とは, T 上のポアソン同型射 $\tau : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ で, $\tau|_X = id_X$ となるものが存在することをいう.

$S_1 := \mathrm{Spec}\, \mathbf{C}[\epsilon]$, $\epsilon^2 = 0$ と置く. $(X, \{\ ,\ \})$ の S_1 上のポアソン変形のことを, 1 次無限小ポアソン変形とよぶ.

錐的シンプレクティック多様体 (X, ω) がシンプレクティック特異点解消 $\pi : (Y, \omega_Y) \to (X, \omega)$ を持ったとする．すなわち，(Y, ω_Y) は非特異なシンプレクティック代数多様体で，π は射影的な双有理射で $\omega_Y = \pi^*\omega$ となるようなもの．このとき

$\{Y$ の（通常の）1 次無限小変形の同値類 $\} = H^1(Y, \Theta_Y)$.

一方，ω_Y から決まる Y のポアソン構造を $\{\ ,\ \}_Y$ とすると，

$\{(Y, \{\ ,\ \}_Y)$ の 1 次無限小ポアソン変形の同値類 $\} = H^2(Y, \mathbf{C})$

クライン特異点 S の極小特異点解消 $\pi : \tilde{S} \to S$ の場合，

$$H^1(\tilde{S}, \Theta_{\tilde{S}}) \overset{\omega_{\tilde{S}}}{\cong} H^1(\tilde{S}, \Omega^1_{\tilde{S}}) \cong H^2(\tilde{S}, \mathbf{C})$$

なので両者は等しい．しかし，X が非孤立特異点を持つ場合は

$\dim H^1(Y, \Theta_Y) = \infty$. いっぽう，$\dim H^2(Y, \mathbf{C}) < \infty$.

ポアソン変形の例 1. $\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環とする. キリング形式によって $\mathfrak{g}$ を双対空間 $\mathfrak{g}^*$ と同一視する. $\mathfrak{g}^*$ を代数多様体とみると,

$$\mathfrak{g}^* = \mathrm{Spec}\ \oplus_{i \geq 0} \mathrm{Sym}^i(\mathfrak{g}).$$

$\mathfrak{g}$ のリー括弧積 $[\ ,\ ]$ を用いて, 環 $\oplus_{i \geq 0}\mathrm{Sym}^i(\mathfrak{g})$ にポアソン構造を入れる: 例えば, $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して, $\{x \cdot y, z\} := x \cdot [y, z] + y \cdot [x, z]$ と定義する. リー括弧積の Jacobi identity を用いると, こうしてできた括弧積も Jacobi identity を満たす. このようにして, $\mathfrak{g}^*$ はポアソン代数多様体になり, 同一視によって $\mathfrak{g}$ もポアソン代数多様体になる.
$\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を固定すると, 射 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}/W$ が存在した. $\chi^{-1}(0) = \mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ は Kirillov-Kostant 形式によって錐的シンプレクティック多様体になる. このとき,

$$\chi : (\mathfrak{g}, \{\ ,\ \}) \to \mathfrak{h}/W$$

は, $\mathcal{N}$ のポアソン変形を与える.

$$\mathfrak{g}_{reg} := \{z \in \mathfrak{g} \mid \chi : smooth\ at\ z\}$$

$\mathfrak{g}$ のポアソン括弧積は, $\mathfrak{g}_{reg}$ 上の相対的シンプレクティック形式

$$\omega_{\mathfrak{g}_{reg}/(\mathfrak{h}/W)} \in \Omega^2_{\mathfrak{g}_{reg}/(\mathfrak{h}/W)}$$

を決める. 可換図式

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\tilde{\chi}"'] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\chi"'] \\ \mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{h}/W \end{tikzcd} \tag{10}$$

を考える. $\Pi^*\omega_{\mathfrak{g}_{reg}/(\mathfrak{h}/W)}$ は, $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の $\tilde{\chi}$-相対シンプレクティック形式 $\omega_{\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}}$ に拡張される. これにより $\tilde{\mathfrak{g}}$ のポアソン構造 $\{\, ,\, \}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ が決まる.

$\Pi_0 : \tilde{\chi}^{-1}(0) \to \chi^{-1}(0)$ はべき零錐 $\mathcal{N}$ のシンプレクティック特異点解消 $T^*(G/B) \to \mathcal{N}$ になっている.

$$\tilde{\chi} : (\tilde{\mathfrak{g}}, \{\, ,\, \}_{\tilde{\mathfrak{g}}}) \to \mathfrak{h}$$

は, $T^*(G/B)$ のポアソン変形を与える.

ポアソン変形の例 2. べき零元 $x \in \mathfrak{g}$ に対する Slodowy 切片 $\mathcal{X} \subset \mathfrak{g}$ を考える. $\mathcal{X} \to \mathfrak{h}/W$ の同時特異点解消

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_{\mathfrak{h}/W} \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{id} & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{h}/W \end{array} \tag{11}$$

を考える. このとき　$\mathcal{X} \subset \mathfrak{g}, \quad \mathcal{Y} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$.

$$\mathcal{X}_{reg} := \{z \in \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \to \mathfrak{h}/W \text{ } is\ smooth\ at\ z\}$$

と置くと $\mathcal{X}_{reg} = \mathfrak{g}_{reg} \cap \mathcal{X}$. $\mathfrak{g}_{reg}$ 上の相対シンプレクティック形式 $\omega_{\mathfrak{g}_{reg}/(\mathfrak{h}/W)}$ を $\mathcal{X}_{reg}$ に制限したものは相対シンプレクティック形式. これにより, $\mathcal{X}_{reg}$ 上にポアソン構造が決まる. このポアソン構造を $\mathcal{X}$ 上に延長する.

一方, $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の相対シンプレクティック形式 $\omega_{\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}}$ を $\mathcal{Y}$ に制限したものは相対シンプレクティック形式. したがって $\mathcal{Y}$ 上にポアソン構造が決まる.

ポアソン代数多様体 $(X, \{\ ,\ \})$ のポアソン変形 $(\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \to T$ は, T が局所アルチン $\mathbf{C}$-代数を座標環にもつアファイン概型のとき, アルチン環上のポアソン変形とよぶことにする.

定義 (普遍ポアソン変形). $(X, \{\ ,\ \})$ のポアソン変形 $(\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \to T$ は次の性質 (*) を満たすとき, 普遍ポアソン変形とよばれる:

(*)　$(X, \{\ ,\ \})$ のアルチン環上の任意のポアソン変形 $\mathcal{X}' \to T'$ に対して, 一意的に射 $\phi : T' \to T$, $\phi(0) = 0$ が決まり, $\mathcal{X}' \to T'$ は, ϕ による引き戻し $\mathcal{X} \times_T T' \to T'$ とポアソン変形として同値

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X}' & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{X} \times_T T' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T' & \xrightarrow{id} & T' & \xrightarrow{\phi} & T \end{array} \tag{12}$$

普遍ポアソン変形と同時特異点解消

錐的シンプレクティック多様体のワイル群

$2n$ 次元錐的シンプレクティック多様体 X に対して, $X - \mathrm{Sing}(X) = X_{reg}$, $\mathrm{Sing}(X) - \mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(X))$ の連結成分を $\{Z_j^{(1)}\}$ さらに, $\mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(X)) - \mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(X))$ の連結成分を $\{Z_j^{(2)}\}$, ... とする. このとき, $Z_j^{(i)}$ は非特異な部分代数多様体である. X のポアソン構造により $Z_j^{(i)}$ はポアソン構造をもつ. こうして得られたポアソン構造は非退化であり, $Z_j^{(i)}$ はシンプレクティック代数多様体である.

$\{Z_j^{(i)}\}$ を X の**シンプレクティックリーフ**とよぶ.

Z_1, ..., Z_r を余次元 2 のシンプレクティックリーフとしたとき,

$$U := X_{reg} \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$$

と置く. $p \in Z_i$ に対して, あるクライン特異点 S_i が存在して

$$(X, p) \cong (S_i, 0) \times (\mathbf{C}^{2n-2}, 0)$$

U の極小特異点解消を $\pi_U : \tilde{U} \to U$ とする．クライン特異点 S_i の極小特異点解消を $\pi_i : \tilde{S}_i \to S_i$ とすると，$\tilde{U}$ は局所的に $(\tilde{S}_i, \pi_i^{-1}(0)) \times (\mathbf{C}^{2n-2}, 0)$ の形である．$\pi_i^{-1}(0)$ の既約成分を C_1, ..., C_k とする．

$$\Phi_i := \{ \sum_{1 \le j \le k} a_j[C_j] \in H^2(\tilde{S}_i, \mathbf{R}),\ \forall a_j \in \mathbf{Z} \,|\, (\sum_{1 \le j \le k} a_j[C_j])^2 = -2\}$$

は S_i と同じタイプのルート系である．$\Delta_i := \{[C_j] \,|\, 1 \le j \le k\}$ は Φ_i の単純ルート．Φ_i のワイル群 $W(\Phi_i)$ は $H^2(\tilde{S}_i, \mathbf{R})$ に作用:

$$W(\Phi_i) \subset GL(H^2(\tilde{S}_i, \mathbf{R}))$$

$R^2(\pi_U)_*\mathbf{R}$ は Z_i 上の局所系になる．Z_i の点 p を固定すると，$(R^2(\pi_U)_*\mathbf{R})_p \cong H^2(\tilde{S}_i, \mathbf{R})$. これから Z_i の基本群の表現

$$\rho_i : \pi_1(Z_i, p) \to \mathrm{GL}(H^2(\tilde{S}_i, \mathbf{R}))$$

が決まる．$\mathrm{Im}(\rho_i)$ はディンキン図形 Δ_i の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\Delta_i)$ の部分群.

$$W_i := \{w \in W(\Phi_i) \,|\, \tau w \tau^{-1} = w,\ \forall \tau \in \mathrm{Im}(\rho_i)\}$$

X の**ワイル群**を $W := \prod_{1\leq i\leq r} W_i$ と定義する.

Theorem 4.1

$\pi : (Y, \omega_Y) \to (X, \omega)$ を錐的シンプレクティック多様体のシンプレクティック特異点解消とする. $l := wt(\omega) > 0$ とする. このとき $\mathbf{C}$-上有限型ポアソン概型からなる $\mathbf{C}^*$-同変な可換図式

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{Y}}) & \xrightarrow{\Pi} & (\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \\ f\downarrow & & g\downarrow \\ H^2(Y, \mathbf{C}) & \longrightarrow & H^2(Y, \mathbf{C})/W \end{array} \tag{13}$$

で次の性質を持つものが存在する.

- $\mathcal{Y}_0 = Y$, $\mathcal{X}_0 = X$. $\forall \bar{t} \in H^2(Y, \mathbf{C})/W$ に対して, $\mathcal{X}_{\bar{t}}$ はシンプレクティック代数多様体. $\Pi_0 = \pi$, $\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ はシンプレクティック特異点解消. $H^2(Y, \mathbf{C})$ への $\sigma \in \mathbf{C}^*$ の作用は, σ^l-倍で与えられる.
- f は $(Y, \{\ ,\ \}_Y)$ の普遍ポアソン変形. g は $(X, \{\ ,\ \})$ の普遍ポアソン変形.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{Y}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{Y}}) \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "f"'] & (\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \arrow[d, "g"'] \\
H^2(Y, \mathbf{C}) \arrow[r] & H^2(Y, \mathbf{C})/W
\end{tikzcd} \tag{14}$$

$\mathcal{Y}$ のポアソン構造は, f-相対シンプレクティック形式 $\omega_{\mathcal{Y}}$ を決める. $\omega_{\mathcal{Y}}$ は $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して $\mathcal{Y}_t$ のシンプレクティック形式 $\omega_{\mathcal{Y}_t}$ を決める. その第 2 コホモロジー類を $[\omega_{\mathcal{Y}_t}] \in H^2(\mathcal{Y}_t, \mathbf{C})$ とする. C^∞-多様体としての自明化 $\mathcal{Y} \cong Y \times H^2(Y, \mathbf{C})$ が存在する. これにより, 同一視 $H^2(\mathcal{Y}_t, \mathbf{C}) \cong H^2(Y, \mathbf{C})$ が決まり, $[\omega_{\mathcal{Y}_t}] \in H^2(Y, \mathbf{C})$ とみなす. このとき

$$[\omega_{\mathcal{Y}_t}] = t \in H^2(Y, \mathbf{C})$$

が成り立つ.
$\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ が同型でないとすると, コンパクトな代数曲線 $C_t \subset \mathcal{Y}_t$ で $\Pi_t(C_t) = 1$ 点　となるものが存在. $\mathcal{Y}$ には $\sigma \in \mathbf{C}^*$ が作用する. このとき $\sigma(C_t) \subset \mathcal{Y}_{\sigma(t)}$. ヒルベルト概型の固有性を用いると, コンパクトな代数曲線 $C := \lim_{\sigma \to 0} \sigma(C_t) \subset Y$ が存在して $\pi(C) = 1$ 点となる.

$\omega_{\mathcal{Y}_t}$ は $\mathcal{Y}_t$ の正則 2 形式. $[\omega_{\mathcal{Y}_t}] \in H^2(\mathcal{Y}_t, \mathbf{C})$, $[C_t] \in H_2(\mathcal{Y}_t, \mathbf{C})$ とみなすと

$$([\omega_{\mathcal{Y}_t}], [C_t]) = 0 \ \ on\ \mathcal{Y}_t$$

同一視 $H_2(\mathcal{Y}_t, \mathbf{C}) = H_2(Y, \mathbf{C})$ において $[C_t] = [C]$ なので

$$([\omega_{\mathcal{Y}_t}], [C]) = 0 \ \ on\ Y$$

$[\omega_{\mathcal{Y}_t}] = t$ なので, $(t, [C]) = 0$. Y の中で π でつぶれる曲線 C のホモロジー類は高々可算個なので, ほとんど全ての $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して, $(t, [C]) \neq 0$. 次がわかった:

ほとんど全ての $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して $\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ は同型である.

実はもっと強いことが言える:

$$\mathcal{D} := \{t \in H^2(Y, \mathbf{C}) \mid \Pi_t :\ not\ isom.\}$$

と置く. このとき $\mathcal{D}$ は原点を通る有限個の超平面からなる.

$$\mathcal{D} = \cup H_i.$$

H_i には 2 つのタイプがある:

- H_i の一般点 t に対して, $\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ が因子をつぶさない場合 (i.e. small contraction の場合), H_i を第 1 種超平面とよぶ.
- H_i の一般点 t に対して, $\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ が因子をつぶす場合 (i.e. divisorial contraction の場合), H_i を第 2 種超平面とよぶ.

W は $H^2(Y, \mathbf{Q})$ に鏡映群として作用する. 超平面 H_i も $\mathbf{Q}$ 上定義されていて, W の鏡映面は, 第 2 種超平面に一致する.

$\{(H_i)_{\mathbf{R}}\}$ は $H^2(Y, \mathbf{R})$ を有限個の部屋 (chamber) に分割する. W の作用は, 部屋の入れ替えを引き起こす. これらの部屋の意味は何か？ 次の可換図式を見る:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{X} \times_{H^2(Y,\mathbf{C})/W} H^2(Y, \mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^2(Y, \mathbf{C}) & \xrightarrow{id} & H^2(Y, \mathbf{C}) & \longrightarrow & H^2(Y, \mathbf{C})/W \end{array} \qquad (15)$$

$\mathcal{X}' := \mathcal{X} \times_{H^2(Y,\mathbf{C})/W} H^2(Y, \mathbf{C})$ と置く．このとき $\mu : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}'$ は $\mathcal{X}'$ の (射影的な) クレパント特異点解消である．つまり，$K_{\mathcal{Y}} = \mu^* K_{\mathcal{X}'}$ が成り立つ．
次のようにして μ 以外に $\mathcal{X}'$ のクレパント特異点解消を作る．
一般に，X のシンプレクティック特異点解消は一意的ではない．

$$\pi_j : Y_j \to X, \quad 1 \leq j \leq m$$

を相異なるシンプレクティック特異点解消とする．ただし，$\pi_1 = \pi$．双有理写像 $Y - - \to Y_j$ は余次元 1 で同型なので，$H^2(Y_j, \mathbf{C})$ と $H^2(Y, \mathbf{C})$ は同一視される．各 Y_j に Theorem を適用して，Y_j の普遍ポアソン変形 $\mathcal{Y}_j$ を作ると，クレパント特異点解消

$$\mu_j : \mathcal{Y}_j \to \mathcal{X}'$$

ができる．

次に $w \in W$ の引き起こす自己同型射 $w : H^2(Y, \mathbf{C}) \to H^2(Y, \mathbf{C})$ を用いて, ファイバー積の可換図式を構成する:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_j^w & \longrightarrow & \mathcal{Y}_j \\ \mu_j^w \downarrow & & \mu_j \downarrow \\ \mathcal{X} \times_{H^2(Y,\mathbf{C})/W} H^2(Y, \mathbf{C}) & \xrightarrow{id \times w} & \mathcal{X} \times_{H^2(Y,\mathbf{C})/W} H^2(Y, \mathbf{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(Y, \mathbf{C}) & \xrightarrow{w} & H^2(Y, \mathbf{C}) \end{array} \tag{16}$$

これから, クレパント特異点解消

$$\mu_j^w : \mathcal{Y}_j^w \to \mathcal{X}'$$

ができる. $\mathcal{Y}_j^w$ の豊富錐

$$\mathrm{Amp}(\mathcal{Y}_j^w) \subset H^2(\mathcal{Y}_j^w, \mathbf{R})$$

を考える.

双有理写像 $\mathcal{Y}_j^w - - \to \mathcal{Y}$ によって同一視 $H^2(\mathcal{Y}_j^w, \mathbf{R}) \cong H^2(\mathcal{Y}, \mathbf{R})$ が決まる．この同一視によって

$$\mathrm{Amp}(\mathcal{Y}_j^w) \subset H^2(\mathcal{Y}, \mathbf{R})$$

とみなす．

Theorem 4.2

- $\{(H_i)_{\mathbf{R}}\}$ による $H^2(Y, \mathbf{R})$ の各部屋は $\mathrm{Amp}(\mathcal{Y}_j^w)$ に一致する．
- 第 2 種超平面は $H^2(Y, \mathbf{R})$ を有限個の大部屋に分けるが，各大部屋は，W の作用に関して基本領域を与える．
- 各大部屋にはちょうど m 個の部屋 $\{\mathrm{Amp}(\mathcal{Y}_j^w)\}_{1 \leq j \leq m}$ が含まれる．

Corollary

X の相異なる（射影的な) シンプレクティック特異点解消の個数は

$$部屋の個数 / |W|$$

に等しい．

例 1. 複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ のべき零軌道 O に対して, 閉包 $\bar{O}$ の正規化を $\tilde{O}$ とする. $\tilde{O}$ がスプリンガー特異点解消 $\pi : T^*(G/P) \to \tilde{O}$ を持ったとする. $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ で $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ となるものを固定する. $\mathfrak{l}$ を $\mathfrak{p}$ の Levi part で $\mathfrak{h}$ を含むものとする. $k(\mathfrak{p})$ を $\mathfrak{l}$ の中心とする. $\mathfrak{p}$ の可解根基を $r(\mathfrak{p})$ とする. π に対する普遍ポアソン可換図式は

$$\begin{array}{ccc} G \times^P r(\mathfrak{p}) & \longrightarrow & (G \cdot r(\mathfrak{p}))^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(\mathfrak{p}) & \longrightarrow & k(\mathfrak{p})/W \end{array} \tag{17}$$

で与えられる. $(G \cdot r(\mathfrak{p}))^n$ は $G \cdot r(\mathfrak{p})$ の正規化.

$$W := N_G(L)/L$$

W は Howlett によって詳しく研究されている.

例 2 (M. Lehn, Y. Namikawa, C. Sorger). 複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ のべき零元 x の Slodowy 切片 $\mathcal{X} \subset \mathfrak{g}$ を考える.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & T^*(G/B) \arrow[d] \\ X := \mathcal{X} \cap \mathcal{N} \arrow[r] & \mathcal{N} \end{tikzcd} \tag{18}$$

同時特異点解消

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{h}/W \end{tikzcd} \tag{19}$$

は, 次のケースを除けば 普遍ポアソン可換図式:

(i) x は B_n, C_n, G_2 または F_4-型リー環の副正則元;

(ii) x は C_n-型リー環のジョルダン型 $[n, n]$ または $[2n-2i, 2i]$, $1 < i \leq n/2$ のべき零元.

(iii) x は G_2-型リー環の 8 次元べき零軌道 O の元.

(i), (iii), (iii) の場合, X は別のリー環 $\mathfrak{g}'$ の Slodowy 切片 $\mathcal{X}'$ を使って, $X = \mathcal{X}' \cap \mathcal{N}'$ と書ける.

(i) $\mathcal{X}'$ は A_{2n-1}, D_{n+1}, D_4 または E_6-型のリー環 $\mathfrak{g}'$ の副正則元に対する Slodowy 切片.

(ii) $\mathcal{X}'$ は D_{n+1}-型リー環 $\mathfrak{g}'$ の, ジョルダン型 $[n+1, n+1]$ または $[2n-2i+1, 2i+1]$, $1 < i \le n/2$ のべき零元に対する Slodowy 切片.

(iii) $\mathcal{X}'$ は C_3-型リー環 $\mathfrak{g}'$ のジョルダン型 $[4, 1^2]$ のべき零元に対する Slodowy 切片.

これらの場合は, 普遍ポアソン可換図式は

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}' & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{h}' & \longrightarrow & \mathfrak{h}'/W' \end{array} \tag{20}$$

で与えられる.

さらなる一般化

今までは錐的シンプレクティック多様体 X がシンプレクティック特異点解消を持つことを想定していたが, 一般に錐的シンプレクティック多様体はシンプレクティック特異点解消を持たない.
しかし極小モデル理論により, シンプレクティック特異点解消の代替物が存在する.

定義. 射影的双有理射 $\pi : Y \to X$ が $\mathbf{Q}$-分解的端末化 ($\mathbf{Q}$-factorial terminalization) とは, 次の条件を満たすこと:

- Y は端末特異点しか持たず, $\mathbf{Q}$-分解的である (すなわち, Y 上の Weil 因子を何倍かすると Cartier 因子になる）.
- π はクレパント (すなわち $K_Y = \pi^* K_X$ である).

Theorem 5.1

(Birkar-Cascini-Hacon-McKernan) X は $\mathbf{Q}$-分解端末化を持つ.

$\pi : Y \to (X, \omega)$ を $\mathbf{Q}$-分解的端末化とする. $\pi^*\omega$ は Y_{reg} のシンプレクティック形式 ω_Y に拡張され (Y, ω_Y) はシンプレクティック代数多様体.

Theorem 5.2

$\pi : (Y, \omega_Y) \to (X, \omega)$ を $\mathbf{Q}$-分解的端末化とする. $l := wt(\omega) > 0$ とする. このとき $\mathbf{C}$-上有限型ポアソン概型からなる $\mathbf{C}^*$-同変な可換図式

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{Y}}) & \xrightarrow{\Pi} & (\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ H^2(Y, \mathbf{C}) & \longrightarrow & H^2(Y, \mathbf{C})/W \end{array} \tag{21}$$

で次の性質を持つものが存在する.

- $\mathcal{Y}_0 = Y$, $\mathcal{X}_0 = X$. $\forall \bar{t} \in H^2(Y, \mathbf{C})/W$ に対して, $\mathcal{X}_{\bar{t}}$ はシンプレクティック代数多様体. $\Pi_0 = \pi$, $\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ は $\mathbf{Q}$-分解的端末化. $H^2(Y, \mathbf{C})$ への $\sigma \in \mathbf{C}^*$ の作用は, σ^l-倍で与えられる.
- f は $(Y, \{\ ,\ \}_Y)$ の普遍ポアソン変形. g は $(X, \{\ ,\ \})$ の普遍ポアソン変形.

定理において，一般の点 $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して，$\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ は同型写像である．さらに次の結果が成り立つ:

Proposition

Y のポアソン変形 $f : \mathcal{Y} \to H^2(Y, \mathbf{C})$ は通常の変形として局所自明である．特に，Y が特異点を持てば，全ての $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して $\mathcal{Y}_t$ は特異点を持つ．

Corollary.

錐的シンプレクティック多様体 X が射影的シンプレクティック特異点をもつことと，X がポアソン変形によって非特異化 (smoothing) できることは同値である．

Corollary の証明．X が射影的シンプレクティック特異点解消 $\pi : Y \to X$ を持ったとする．π に対して定理を適用して，普遍ポアソン可換図式を得る．Y が非特異なので ($\mathbf{C}^*$-作用を用いれば)，全ての $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して $\mathcal{Y}_t$ は非特異．t を一般にとると，$\mathcal{Y}_t \cong \mathcal{X}_{\bar{t}}$．つまり $\mathcal{X}_{\bar{t}}$ も非特異．すなわち X はポアソン変形で非特異化される．

X がポアソン変形で非特異化できると仮定する.

X の $\mathbf{Q}$-分解的端末化 $\pi : Y \to X$ を取り, 定理を適用して, 普遍ポアソン可換図式をえる.

仮定から X の普遍ポアソン変形 $\mathcal{X} \to H^2(Y, \mathbf{C})/W$ の一般ファイバー $\mathcal{X}_{\bar{t}}$ は非特異である.

$\bar{t}$ を十分一般にとれば, $\bar{t}$ のリフト $t \in H^2(Y, \mathbf{C})$ に対して $\Pi_t : \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_{\bar{t}}$ は同型である.

すなわち $\mathcal{Y}_t$ は非特異. もし Y が特異点を持ったとすると Proposition に矛盾. したがって Y は非特異. すなわち, 最初に取った $\pi : Y \to X$ はシンプレクティック特異点解消である. $\square$

普遍ポアソン変形に関する最近の研究

シンプレクティック双対性の観点
T.Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Asterisque **384** (2016)

トーリック超ケーラー多様体:
T. Nagaoka, Pacific J. Math. **313** (2021)

シンプレクティック商特異点.
G. Bellamy, Compos. Math. **152** (2016)
G. Bellamy, A. Craw, Invent Math. **222** (2020)

べき零軌道とその被覆.
I. Losev, arXiv:1605.00592
Y. Namikawa, arXiv: 1907.07812, arXiv: 1912.01729
D. Matvieievskyi, arXiv: 2003.09356
I. Losev, L. Mason-Brown, D. Matvieievskyi, arXiv: 2108.03453

付録: 普遍ポアソン変形図式の構成

$\pi : Y \to X$ を錐的シンプレクティック多様体 X のシンプレクティック特異点 (または $\mathbf{Q}$-分解的端末化) とする.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{Y}}) & \xrightarrow{\Pi} & (\mathcal{X}, \{\ ,\ \}_{\mathcal{X}}) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow \\ H^2(Y, \mathbf{C}) & \longrightarrow & H^2(Y, \mathbf{C})/W \end{array} \tag{22}$$

の構成方法の概略は次の通り: $(Y, \{\ ,\ \}_Y)$ および $(X, \{\ ,\ \})$ のポアソン変形関手

$$\mathrm{PD}_Y : \mathrm{Art}_{\mathbf{C}} \to (\mathrm{Set}), \quad \mathrm{PD}_X : \mathrm{Art}_{\mathbf{C}} \to (\mathrm{Set})$$

を考える. PD_Y, PD_X は形式的普遍ポアソン変形をもつ: ある完備局所 $\mathbf{C}$-代数 (R_Y, m_Y), (R_X, m_X) が存在して

$$\{Y_n\} \to \{T_n\}, \quad T_n := \mathrm{Spec}\, R_Y/(m_Y)^{n+1}$$

$$\{X_n\} \to \{S_n\}, \quad S_n := \mathrm{Spec}\, R_X/(m_X)^{n+1}$$

X の $\mathbf{C}^*$-作用は, Y の $\mathbf{C}^*$-作用に延びる. 形式的普遍ポアソン変形の間には $\mathbf{C}^*$-同変な可換図式が存在:

$$\begin{array}{ccc} \{Y_n\} & \longrightarrow & \{X_n\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{T_n\} & \longrightarrow & \{S_n\} \end{array} \tag{23}$$

$\{(Y, \{\ ,\ \}_Y)$ の 1 次無限小ポアソン変形の同値類 $\} = H^2(Y, \mathbf{C})$.

T^1-持ち上げの性質から, Y のポアソン変形は障害をもたない. R_Y はアファイン空間 $H^2(Y, \mathbf{C})$ を原点で完備化したもの. 局所 $\mathbf{C}$-代数の射 $R_X \to R_Y$ が存在する.

Theorem 6.1

X のポアソン変形は障害を持たない. 特に R_X は正則局所環.

可換図式

$$\begin{tikzcd} \{Y_n\} \arrow[r] \arrow[d] & \{X_n\} \arrow[d] \\ \{T_n\} \arrow[r] & \{S_n\} \end{tikzcd} \tag{24}$$

を $\mathbf{C}^*$-作用を使って代数化する:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ T \arrow[r, "\pi_*"] & S \end{tikzcd} \tag{25}$$

このとき $T = H^2(Y, \mathbf{C})$ である.

Theorem 6.2

$\pi_* : T \to S$ はガロア被覆であり, ガロア群は X のワイル群 W に一致する. さらに $T = H^2(Y, \mathbf{C})$ とみたとき, W は $H^2(Y, \mathbf{C})$ に線形に作用する.