導来代数幾何における射影多様体と Serre の定理について

小原 まり子

本研究は $\mathbb{E}_\infty$-環上に次数 (特に $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$) の概念を適切に定義し, 射影スペクトラルスキームを開被覆により定式化し, Serre の定理を証明するものである。

次数付き $\mathbb{E}_\infty$-環を定義するのに, 対称モノイダル圏 $\{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ から得られる ∞-オペラドと, そこからの関手のなす無限圏に Day convolution を入れた対称モノイダル無限圏を用いる。ここに於いて次数 0 への制限および一元局所化が $\mathbb{E}_\infty$-環構造を落とさずに定式化出来ることを示した。かくして射影スペクトラルスキームが Zariski 開被覆を用いて, ある X の開被覆 $\{U_a\}$ とある次数付き $\mathbb{E}_\infty$-環 A が存在し, 次数 1 の元 $\alpha_a \in \pi_0(A)$ に対して $(U_a, \mathcal{O}_X) \simeq (\mathrm{Spec}\,(A[\alpha_a^{-1}]_0), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,(A[\alpha^{-1}]_0)})$ なるものと定式化される。

次に随伴関手

$$\widetilde{(-)} : \mathrm{Mod}_A(\mathbb{Z}) \rightleftarrows \mathrm{QCoh}(\mathrm{Proj}\,(A)) : \Gamma_*(\mathrm{Proj}\,(A), -)$$

を構成した。この随伴を”有限生成”な部分に制限すると同値になるというのが Serre の定理の主張である。ここで以下のように有限生成性を定義する。

- 次数 $\mathbb{N}$ 付き connective $\mathbb{E}_\infty$-ring A 上の加群 M が almost finitely generated とは各 $n \in \mathbb{Z}$ について次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\pi_0(A)$ 加群 $\pi_n(M)$ が有限生成で, $n << 0$ に対し $\pi_n(M) = 0$ である時にいう。$\mathrm{Mod}_A^{\mathbf{afg}}(\mathbb{Z})$ を $\mathrm{Mod}_A(\mathbb{Z})$ の充満部分無限圏で almost finitely generated 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群で生成されるものとする。

- almost finitely generated な次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群 M が almost torsion とは次数 $\mathbb{Z}$ 付き $\pi_0(A)$ 加群 $\pi_n(M)$ が各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して上に有界であること。$\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{ator}}(\mathbb{Z})$ を $\mathrm{Mod}_A^{\mathbf{afg}}(\mathbb{Z})$ の充満部分無限圏で almost torsion 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群で生成されているものとする。

$M \in \mathrm{Mod}_A(\mathbb{Z})$ に対し $\widetilde{M} \simeq 0$ の必要十分は $\pi_n(M)$ が $n \in \mathbb{Z}$ に対して上に有界であること, また M を almost finitely generated 次数 $\mathbb{Z}$ 付き A 加群とすると $\widetilde{M} \simeq 0$ の必要十分は M が almost torsion であることを示した。さらに $\Gamma_*(\mathrm{Proj}\,(A), -)$ を $\mathrm{QCoh}(\mathrm{Proj}\,(A))^{aperf}$ に制限すると行き先が $\mathrm{Mod}_A^{\mathbf{afg}}(\mathbb{Z})$ に入ることを示し, 以下の主結果を得た。

Theorem 0.1. 関手 $\widetilde{(-)} : \mathrm{Mod}_A(\mathbb{Z}) \to \mathrm{QCoh}(X)$ は小安定対称モノイダル無限圏の同値を導く

$$\mathrm{Mod}_A^{\mathbf{afg}}(\mathbb{Z})/\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{ator}}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{QCoh}(X)^{\mathrm{aperf}}$$

参考文献

[1] J. Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.

[2] ———, *Higher algebra*, Preprint, available at https://www.math.ias.edu/~lurie/ (2017).

[3] ———, *Spectral Algebraic Geometry*, Preprint, available at https://www.math.ias.edu/~lurie/ (2018).