分岐理論と階数 1 の層の特性サイクル

谷田川友里 (埼玉大学)

なめらかな代数曲線上の構成可能エタール層のオイラー数は Grothendieck-Ogg-Shafarevish 公式 ([SGA5]) により、境界上の点での層の分岐の不変量を用いて計算される。特性サイクルを経由した、Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の高次元版について考える。なめらかな代数多様体上の構成可能エタール層の特性サイクルは代数多様体の余接束上の代数的サイクルとして定義される ([S])。特性サイクルは指数公式により層のオイラー数を余接束の零切断との交点数として計算する。代数曲線を考える場合、分岐理論における不変量を用いた特性サイクルの計算は指数公式から上記の Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式を導く。代数曲面の場合、特性サイクルの分岐の不変量を用いた計算は斎藤により条件付きのものが知られている ([S]) が、ここでは層を階数 1 のなめらかなエタール層から定まるものに制限して、分岐の制限を緩めた場合の特性サイクルの計算を考える。

簡単に分岐の不変量について説明する。代数的整数論における p 進数環を代表例とするような完備離散付値環はその商体の有限次拡大における整閉包も完備離散付値環になるという性質をもつ。この完備離散付値環の拡大における極大イデアル分解の様子と剰余体の拡大の様子をあわせて分岐とよび、分岐の複雑さを分類するような絶対ガロア群のフィルトレーションがある。絶対ガロア群の表現が与えられたとき、この絶対ガロア群のフィルトレーションによる固定部分の次元やフィルトレーションの番号付けを用いて、ガロア群の表現の分岐の不変量が定義される。代数多様体上なめらかなエタール層を考える場合には、対応する数論的基本群の表現を考える。体の絶対ガロア群は体のスペクトルの数論的基本群であるから、なめらかな代数多様体の境界上の余次元 1 の点での局所体の絶対ガロア群から代数多様体の数論的基本群への自然な準同型が定まり、この準同型を経由してなめらかなエタール層から完備離散付値体の絶対ガロア群の表現を得る。この絶対ガロア群の表現の分岐の不変量を、なめらかなエタール層の境界上の余次元 1 の点での局所的な分岐の不変量として定義する。

代数曲面上階数 1 のなめらかなエタール層から定まる構成可能エタール層に対し、その特性サイクルの分岐の不変量を用いた計算には、上で述べた斎藤による条件付きの計算および加藤による対数的な特性サイクル ([K]) を用いる。対数的な特性サイクルは分岐の不変量を用いて対数的な余接束上に定義される。余接束から対数的な余接束へは自然なベクトル束の射が定義でき、この射に関する対数的な特性サイクルの余接束への持ち上げと特性サイクルが同じものであることを示すことで特性サイクルの分岐の不変量を用いた計算を与えることができる。

参考文献

[SGA5] A. Grothendieck, rédigé par Bucur, I., Formule d'Euler-Poincaré en cohomologie étale, *Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L*, *SGA 5*, Springer Lecture Notes in Math. 589

[K] K. Kato, Class field theory, $\mathcal{D}$-modules, and ramification on higher dimensional schemes, part I, *Am. J. of Math.* Vol. **116**, No. 4 (1994), 757–784.

[S] T. Saito, The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf, *Invent. Math.* 207 (2017), no. 2, 597–695.