

令和4年度

理学部

数物科学科 物理学コース

第3年次編入学者選抜学力試験問題

数 学

令和3年6月12日(土)

10:00~11:30

注意事項

1. 解答用紙表紙の指定された箇所に、受験番号、氏名を記入すること。
受験番号は、受験票の受験番号欄に記入してあるとおりに書くこと。
指定された箇所以外には、受験番号・氏名を絶対に書かないこと。
2. B1~B4の全問を解答すること。
3. 解答は、別冊子の解答用紙に記入すること。
解答用紙左上の問題番号を確認し、問題に対応する解答用紙に記入すること。
4. 各問題の解答用紙(両面)はそれぞれ1枚ある。
5. 問題冊子の総ページ数————— 3ページ
問題ページ————— 第2~3ページ
(第1ページは白紙)
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

B1 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x - (x - a)^{2/3}$ の極値を求めよ。ただし、 a は正の実数で、 x は a より大きい実数とする。

(2) 3次元の xyz 空間において、楕円体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ の面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ。ただし、 a, b, c はいずれも正の実数とする。

B2 2次元の xy 平面内の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ。

ただし、 $a > b > 0$ であり、また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とする。

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2 \theta} \, d\theta$$

で与えられることを示せ。

(2) 離心率 \tilde{e} が 1 より十分小さいとき、長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4} \tilde{e}^2 \right)$$

となることを示せ。

B3 時間 t ($t \geq 0$) で関数 $x(t)$ についての次の微分方程式を考える。

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(f(t) - x(t))$$

ここで a は正の実数で、 $f(t)$ は与えられた実関数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a = \log_e 2$ で、 $t \geq 0$ で $f(t) = 0$ である場合に、 $x(0) = 1$ をみたす解 $x(t)$ を求めよ。

次ページに続く

(2) 一般に時間が十分経った後の解は, $x(0)$ の値に関係なく

$$x(t) = a \int_0^t f(u) e^{a(u-t)} du$$

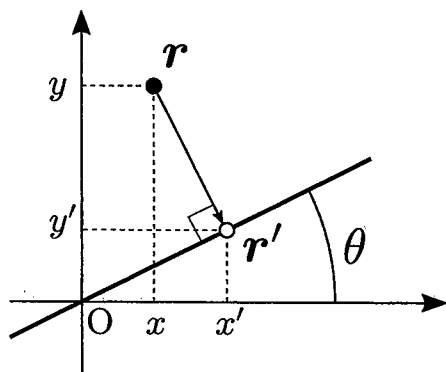
に近づくことを示せ。

(3) 次に, $a = \log_e 2$ で, 関数 $f(t)$ が 0 以上の任意の整数 n について

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (2n \leq t < 2n+1) \\ 0 & (2n+1 \leq t < 2n+2) \end{cases}$$

である場合を考える。整数 N が十分大きくなったときに $x(2N)$ が近づく値を求めよ。

B4 下図のように xy 平面上の任意の点 $r = (x, y)$ を, x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $r' = (x', y')$ を求める変換を考える。以下の問いに答えよ。



(1) ベクトル r と単位ベクトル $e = (\cos \theta, \sin \theta)$ を使って, ベクトル r' を表せ。

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる。行列 A を求めよ。

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し, それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ。