令和4年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科（博士前期課程）

数物科学専攻

【　一　般　選　抜　】

試験科目名　：　筆記試験（物　理）

令和３年７月３日（土）

試験時間：１０：００～１２：００

注意事項

（１）問題［Ｉ］から［Ⅳ］のうち３問題を選択して解答すること。

（２）問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
１枚の解答用紙に複数の問題の解答を書いた場合は採点の対象としない。

（３）解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

問題冊子の総ページ数　――――――――――　９ページ

[I]

質量 m の物体が気体中を落下する運動を考える。物体には，鉛直下向きの重力と，速度に比例する抵抗力がはたらく。重力加速度の大きさを g とし，鉛直下向きを正として，以下の問いに答えよ。

問 1　気体 A 中では，速度に比例する抵抗力の比例係数は $k_{\mathrm{A}}(>0)$ である。その中で，物体は時刻 $t=0$ において速度ゼロで落下をはじめた。

(a) 物体の運動方程式を立てよ。

(b) 時刻 $t(>0)$ における物体の速度を求めよ。また，速度が t の経過によってどのように変化するかをグラフで示せ。軸が表す物理量やグラフの特徴が分かるように描くこと。

(c) 十分時間が経過すると，物体の速度は時刻 t によらず一定とみなすことができる。このときの速度を求めよ。また，速度が一定となる理由を答えよ。

問 2　物体は，問 1 (c) の解答に十分に近い速度になった後，異なる気体 B へなめらかに突入し，さらに落下運動を続けた。気体 B 中では，速度に比例する抵抗力の比例係数は $k_{\mathrm{B}}(>0)$ である。また，気体 B に突入した瞬間の時刻を $t'=0$ とする。

(a) 気体 B に突入した後の物体の運動方程式を立てよ。

(b) 時刻 $t'(>0)$ における物体の速度を求めよ。気体 A から気体 B に突入した瞬間の速度は問 1 (c) で得られた値を用いること。

(c) さらに十分な時間が経過すると，物体の速度は時刻 t' によらず一定とみなすことができる。このときの速度を求めよ。

(d) 気体 B 中での速度が t' の経過によってどのように変化するかを，$k_{\mathrm{A}}>k_{\mathrm{B}}$，$k_{\mathrm{A}}<k_{\mathrm{B}}$ のそれぞれの場合についてグラフで示せ。軸が表す物理量やグラフの特徴が分かるように描くこと。

[II]

図1のように，電荷 $q(>0)$ を帯びた半径 a の小球が z 軸上を正の向きに速さ v で等速直線運動している場合を考える。点Pを y-z 平面内にとり，その位置は，座標原点Oからの距離 r，z 軸からの角度 θ で表される。点Pを通る円Cはその中心を z 軸が垂直に貫く。v は光速より十分小さいので相対論的効果は無視してよく，真空の誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えよ。

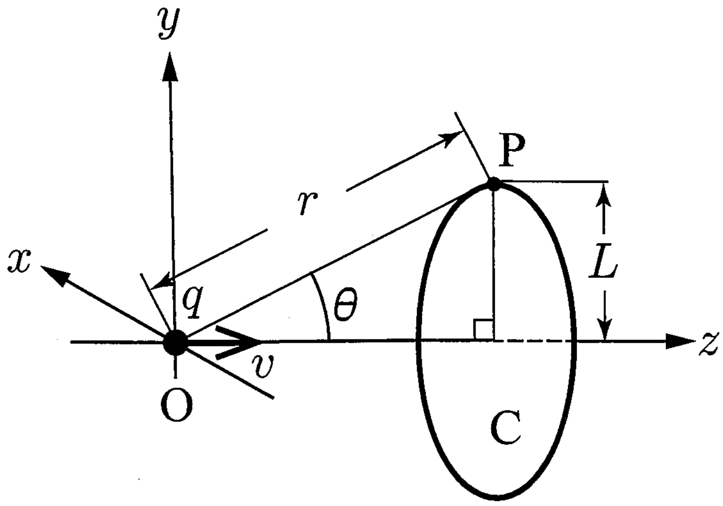


図 1

問1　小球がちょうど座標原点Oにさしかかったとき，点Pに作る電場 $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$ を q，r，θ，ε_0 を用いた式で表せ。

問2　電荷をもつ小球が運動すると周囲の空間には磁場 $\vec{H}$ が生じる。点Pにおける磁場 $\vec{H}$ の方向と向きを答えよ。

問3　系の対称性から，Cの周上の全ての点で磁場 $\vec{H}$ の強さは同じになり，これを H とおく。以下の手順で H を求めよう。なお，電束密度を $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$ とする。また，ある曲面S上の点 $\vec{r}$ でSを垂直に貫く単位ベクトルを $\vec{n}(\vec{r})$ とし，$\vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})$ をSで面積分したものを電束と呼ぶ。

次ページに続く

[II] の続き

(a) 小球が座標原点 O 上にいたときから，微小時間 dt を経ると vdt だけ進む。図 2 に示すように，円 C を z 方向に vdt だけ平行移動した C' を考え，C と C' の間がなす長さ vdt の円筒形の領域を考える。小球が O にいるとき C を貫く電束と，vdt だけ移動したとき C' を貫く電束は同じなので，C を貫く電束の dt を経る間の変化を $\mathrm{d}I_D$ とおくと，$\mathrm{d}I_D$ はこの円筒の側面を貫く電束である。C の半径を L として

$$\mathrm{d}I_D = \frac{q\sin\theta}{2r^2}Lv\mathrm{d}t \tag{1}$$

となることを示せ。

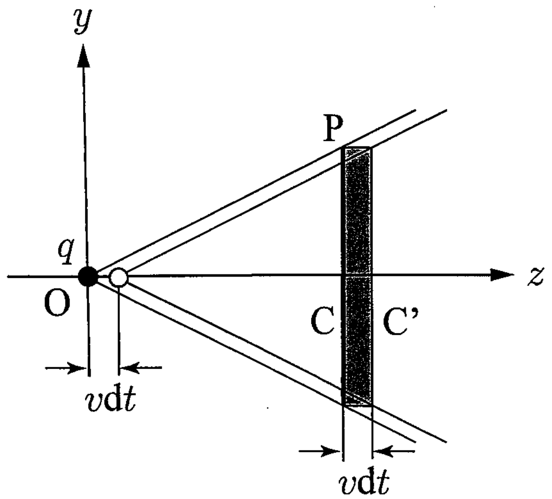


図 2：小球が O 上にいるときを●で表し，微小時間 dt を経た後の位置を○で表す。

(b) 点 P には電流は流れていないので，磁場 $\vec{H}$ は前問で求めた $\mathrm{d}I_D$ を用いた以下の関係式

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{H} = \frac{\mathrm{d}I_D}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

を満たす。ここで，左辺は円 C に沿った線積分である。これを用いて磁場の強さ H を求めよ。

問 4　真空の透磁率を μ_0 として，強さ H の磁場がもつエネルギー密度 u は $u = \frac{\mu_0}{2}H^2$ で与えられる。これを用いて，この系の磁場の全エネルギー

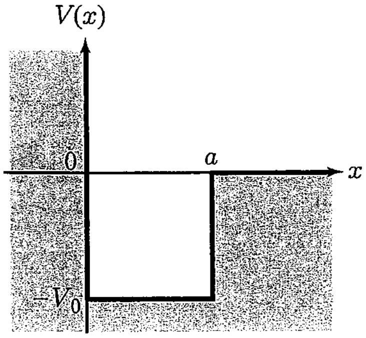
$$U = \frac{\mu_0}{2}\int \mathrm{d}^3x H^2 \tag{3}$$

を求めよ。ここで，小球の半径は a であることから，体積積分はその外側を考え，$\int \mathrm{d}^3x = \int_a^\infty r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta$ とする。なお，計算の過程で必要であれば $\int \sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$ （積分定数省略）を用いてよい。

[III]

図のような非対称の１次元井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ -V_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (a < x) \end{cases} \quad (1)$$



に束縛されている質量 m の粒子について考える。ここで $V_0 > 0$ とする。以下の問いに答えよ。

問１　粒子のエネルギーを $-E$ $(0 < E < V_0)$，粒子の波動関数を $\psi(x)$ として，領域 I $(0 < x < a)$ および領域 II $(a < x)$ において成り立つシュレディンガー方程式をそれぞれ書け。

問２　領域 I において，波動関数 $\psi(x)$ の一般解が，k を正の実定数として，

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \quad (2)$$

で書けることを示せ。ここで，A，B は任意の定数である。

問３　領域 II において，波動関数 $\psi(x)$ の一般解が，b を正の実定数として，

$$\psi(x) = C\exp(-bx) + D\exp(bx) \quad (3)$$

で書けることを示せ。ここで，C，D は任意の定数である。

問４　問２および問３の一般解が，(1) 式の井戸型ポテンシャルに束縛されている粒子の状態を表している波動関数であるとすると，以下のどの条件を満たすべきか。理由とともに答えよ。

(ア) $A = 0, C = 0$　(イ) $B = 0, C = 0$　(ウ) $A = 0, D = 0$　(エ) $B = 0, D = 0$

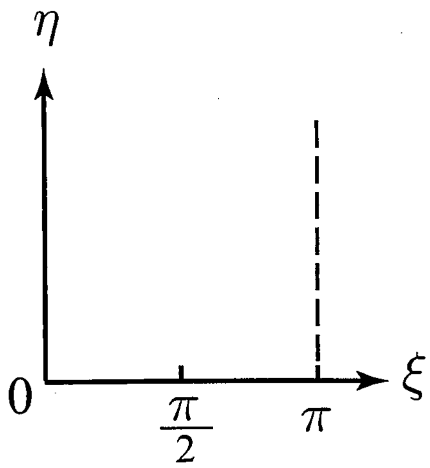
次ページに続く

[III] の続き

問 5　波動関数は $x = a$ においてなめらかにつながらなければならない。$\eta = ba$，$\xi = ka$ とすると，この条件から，

$$\eta = -\xi \cot \xi \tag{4}$$

が導かれることを示せ。また，この関係を，下図のように ξ を横軸，η を縦軸に取って，$0 < \xi < \pi$，$\eta > 0$ の領域で図示せよ。正確である必要はないが，特徴が分かるように描くこと。



問 6　$\eta^2 + \xi^2 = (ba)^2 + (ka)^2 = R^2$ とおくとき，R が E に依存しないことを示せ。またこの式のグラフを，問 5 のような ξ-η 平面に描くとするとどのようなグラフになるか，言葉で説明せよ。

問 7　問 5 および問 6 で示されたグラフの交点が，この系での基底状態の解を与える。この系においては，V_0 の値によっては粒子が束縛されない場合がある。その条件を求めよ。

問 8　基底状態の波動関数 $\psi(x)$ の概形を，横軸を x として図示せよ。規格化は考えなくて良い。正確である必要はないが，特徴が分かるように描くこと。

[IV]

N 個の極性２原子分子からなる理想気体が体積 V の容器の中に閉じ込められており，それらは一様な電場（その大きさを E とする）の中に置かれている。この系の性質を古典統計力学を用いて取り扱う。なお，この系の分配関数 Z は以下の式で与えられる。

$$Z = Z_{\mathrm{trans}} \times Z_{\mathrm{rot}} \tag{1}$$

ここで，Z_{trans} および Z_{rot} は並進運動および回転運動に起因する分配関数であり，１個の分子の並進運動および回転運動による分配関数 $z_{1\mathrm{t}}$ および $z_{1\mathrm{r}}$ を用いて，以下のように与えられる。

$$Z_{\mathrm{trans}} = \frac{(z_{1\mathrm{t}})^N}{N!} \tag{2}$$

$$Z_{\mathrm{rot}} = (z_{1\mathrm{r}})^N \tag{3}$$

ボルツマン定数を k_{B}，温度を T，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$（h：プランク定数）として以下の問いに答えよ。ただし，$N \gg 1$ としてその場合に成り立つ近似式（スターリングの公式）

$$\log N! \simeq N \log N - N \tag{4}$$

を用いよ。

問１　ヘルムホルツの自由エネルギー $F = -k_{\mathrm{B}} T \log Z$ は，並進運動に起因する部分 F_{trans} と回転運動に起因する部分 F_{rot} の和で与えられる。F_{trans} と F_{rot} を k_{B}，T，N，$z_{1\mathrm{t}}$，$z_{1\mathrm{r}}$ の中から必要なものを使って表せ。

問２　並進運動に起因する部分を考える。

(a) １個の分子の並進運動のハミルトニアン $\mathcal{H}_{1\mathrm{t}}$ は電場には依存せず，以下の式で与えられる。

$$\mathcal{H}_{1\mathrm{t}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ は分子の運動量，m は分子１個の質量である。$z_{1\mathrm{t}}$ は以下の式で与えられることを示せ。

$$z_{1\mathrm{t}} = V \left(\frac{m k_{\mathrm{B}} T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \tag{6}$$

(b) エントロピーおよび熱容量の並進運動に起因する部分 S_{trans} および熱容量 C_{trans} を求めよ。

次ページに続く

[IV] の続き

問 3　回転運動に起因する部分を考える。

(a) 1 個の分子の回転運動のハミルトニアン $\mathcal{H}_{1\mathrm{r}}$ は電場に依存する項を含み，以下のように与えられる。

$$\mathcal{H}_{1\mathrm{r}} = \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{p_\phi^2}{2I\sin^2\theta} - \mu E\cos\theta \tag{7}$$

ここで，I は分子の重心を通る回転軸の回りの慣性モーメント，μ は分子 1 個の双極子モーメントであり，(p_θ, p_ϕ) は方位角 (θ, ϕ) に共役な運動量である。$z_{1\mathrm{r}}$ は以下の式で与えられることを示せ。

$$z_{1\mathrm{r}} = \frac{2Ik_{\mathrm{B}}T}{\hbar^2}\frac{\sinh x}{x} \tag{8}$$

ただし，$x = \dfrac{\mu E}{k_{\mathrm{B}}T}$ である。

(b) エントロピーおよび熱容量の回転運動に起因する部分 S_{rot} および C_{rot} を求めよ。また，これらの量を電場 E の関数として図示せよ。