アフィンLie環$\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$の表現の構成

森　暁子

2007.01.31

目 次

序文

この論文ではアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ のレベル l の表現を具体的に構成する事を最終目的として議論を進めていく。アフィン Lie 環は、有限次元単純 Lie 環をさらに中心拡大したものである。アフィン Lie 環は無限次元の Heisenberg 代数を部分 Lie 環として含む。つまり、有限次元単純 Lie 環の Cartan 代数を、ループ化、つまり変数をローラン多項式環で係数拡大し、さらに中心拡大をする事で Heisenberg 代数が構成されるのである。アフィン Lie 環の表現を構成する際に、Heisenberg 代数に含まれない元を考慮しなければならず、そのために、頂点作用素と呼ばれる物理の原理論で用いられる作用素を利用する。従って、有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$、Cartan 代数 $\mathfrak{h}$、アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ の構造を調べ、その作用素積展開や、作用素値関数などの singular　part や交換関係を計算する事により、実際に表現を構成する事が出来るのである。

第 1 章では基本的な準備として、有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその例 (アフィン Lie 環、Heisenberg 代数、Virasoro 代数) についての定義を記している。第 2 章では、一般的な Lie 環の表現について論ずる。具体的には、Lie 環の表現を考える際に不可欠な、普遍包絡環と呼ばれる結合代数や、同時固有値などの概念について説明する。また、第 3 章では Lie 環の表現について簡潔に述べる。第 4 章では、具体的にアフィン Lie 環の構造について、第 5 章では、アフィン Lie 環の可積分表現について論じている。第 6 章では、Heisenberg 代数の詳しい構造と表現について説明した上で、第 7 章でこの論文の主題でもある、アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ のレベル l の表現の構成をする。

この論文では、基礎体は $\mathbb{C}$ とする。

1　準備

定義 1.1. (Lie 環の定義)
　ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が Lie 環であるとは、ブラケット積（交換子）と呼ばれる積

$$[\quad,\quad]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\ni(x,y)\mapsto[x,y]\in\mathfrak{g} \tag{1}$$

が存在し、これが次の条件を満たす事をいう。

1. (双線形性)

$$[ax+bx',y]=a[x,y]+b[x',y]$$
$$[x,ax+by']=a[x,y]+b[x,y']$$

2. （歪対称性）

$$[y,x]=-[x,y]$$

3. （Jacobi 恒等式）

$$[[x,y],z]=[x,[y,z]]+[[z,x],y]$$

ただし、$x,y,z,x^{'},y^{'}\in\mathfrak{g},a,b\in\mathbb{C}$ である。

定義 1.2.
　線形空間 V において、

$$\mathfrak{gl}(V)=\mathrm{End}(V)=\{f:V\longrightarrow V:\text{線形写像}\}$$

を定義すると、

$$[f,g]=f\circ g-g\circ f\quad(f,g\in\mathfrak{gl}(V))$$

で、Lie 環となる。$\circ$ は行列の写像を表す。特に、$V=\mathbb{C}^2$ の時は、$\mathfrak{gl}(V)=M_n(\mathbb{C})$ となる。

例 1.3. ($\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の定義)
$\mathbb{C}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ を次で定義する。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2 = \{A \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2) \mid \mathrm{tr}\, A = 0\}$$

${}^\forall A, B \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ に対して、$\mathrm{tr}([A,B]) = 0$ より、$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ は $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ の部分 Lie 環である。ただし、$\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^2)$ は、$[A,B] = AB - BA$ の関係により Lie 環とみる。さらに、$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の基底間の交換関係は次の様になる。

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

例 1.4. (アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$)
$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ とし、これに対するアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ を次の様に定義する。

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d \tag{2}$$

さらに、交換関係を次の様に定める。${}^\forall X, Y \in \mathfrak{g}, {}^\forall f, g \in \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]$ に対して、

$$[X \otimes f, Y \otimes g] = [X,Y] \otimes fg + \mathrm{Res}_{\xi=0}(gdf)(X|Y)K \tag{3}$$
$$[\widehat{\mathfrak{g}}, K] = 0 \tag{4}$$
$$[d, X \otimes \xi^n] = nX \otimes \xi^n \tag{5}$$

ここで、$(\quad|\quad)$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 上の双線形形式 $(\quad|\quad)$ を $(X|Y) = \mathrm{tr}(XY) \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ と定める不変形式である。Lie 環 $\mathfrak{a}$ 上の双線形形式 $(\quad|\quad)$ が不変であるとは、${}^\forall X, Y, Z \in \mathfrak{a}$ に対して、次を満たす事をいう。

$$([X,Y]|Z) = (X|[Y,Z])$$

以下、

$$X(n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \otimes \xi^n$$

と書く。交換関係を $X(m), Y(n)$ について計算すると、次が得られる。

$$[X(m), Y(n)] = [X,Y](m+n) + \mathrm{Res}_{\xi=0}(m\xi^{m+n-1}d\xi)(X|Y)K \tag{6}$$
$$= [X,Y](m+n) + m\delta_{m+n,0}(X|Y)K \tag{7}$$

例 1.5. (Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$)
Lie 環の Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}a_n \oplus \mathbb{C}c \\
&[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}c \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \\
&[\mathcal{B}, c] = 0
\end{aligned}
$$

ここで、

$$[a_1, a_{-1}] = c$$

が成立する。

例 1.6. (Virasoro 代数)
Virasoro 代数と呼ばれる無限次元 Lie 代数を次の様に定める。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}c_v \\
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c_v \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \\
&[\mathrm{Vir}, c_v] = 0
\end{aligned}
$$

2 Lie 環 の表現と普遍包絡環

定義 2.1. (Lie 環の表現)
ベクトル空間 V 上の Lie 環 $\mathfrak{g}$ から行列環 $\mathfrak{gl}(V)$ への Lie 環としての準同型

$$
\begin{gathered}
\pi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\
[\pi(X), \pi(Y)] = \pi([X, Y]) \quad (X, Y \in \mathfrak{g})
\end{gathered}
$$

を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の V 上の表現という。

定義 2.2.

V を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現とする。V の部分ベクトル空間 U が次を満たす時、U を V の部分表現という。

$$xu \in U \quad (x \in \mathfrak{g}, u \in U)$$

定義 2.3.

V が、V と 0 以外の部分空間を含まない時、V を既約表現と言う。既約でない表現を可約という。

定義 2.4.

$\mathfrak{g}$ の表現 V の任意の部分空間 U に対して、V の部分空間 $U^{'}$ で、次を満たすものが存在する時、V は完全可約であるという。

$$V = U \oplus U^{'}$$

定義 2.5. (テンソル代数)

ベクトル空間 V に対し、テンソル代数 $T(\mathfrak{g})$ を以下で定義する。

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes n}$$

ただし、$T(\mathfrak{g})$ は次で定める積より、多元環とみなす。

$$\begin{aligned}&(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n)\\&v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \quad (v_i, w_i \in \mathfrak{g})\end{aligned}$$

定義 2.6. (Lie 環の普遍包絡環)

Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を次で定める。I を、元 $x \otimes y - y \otimes x - [x, y] (x, y \in \mathfrak{g})$ で生成される $T(\mathfrak{g})$ の両側イデアルとし、商代数 $U(\mathfrak{g})$ を

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I$$

で定める。この時、$U(\mathfrak{g})$ を普遍包絡環という。

普遍包絡環に関しては、次の PBW の定理が知られている。

事実 2.7. (Poincare　Birkoff　Witt(PBW) の定理)

$\mathfrak{g}$ を可算次元の Lie 環とする。$\{x_1, x_2, \cdots, \}$ を、Lie 環 $\mathfrak{g}$ の任意の基底とする時、次の元は、普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の基底をなす。

$$\begin{aligned}&x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_r}^{n_r}\\&i_1 < i_2 < \cdots < i_r \quad (n_i \in \mathbb{N}, r \geq 0)\end{aligned}$$

定義 2.8. (随伴表現)
Lie 環 $\mathfrak{g}$ には、$\mathfrak{g}$ 自身が次の様に作用している。

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathfrak{g} \\ y &\longmapsto [x, y] \qquad ({}^{\forall}x, y \in \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

この作用を随伴表現という。

定義 2.9. (同時固有ベクトル、同時固有空間、同時固有値)
V を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の表現、$\mathfrak{s}$ を $\mathrm{End}V$ の部分 Lie 環とする時、$v \in V$ が $\mathfrak{s}$ の同時固有ベクトルであるとは、${}^{\forall}X \in \mathfrak{s}$ に対して、v が X の固有ベクトルであることをいう。この時、

$$\alpha \in \mathfrak{s}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{s}, \mathbb{C})$$

が存在し、

$$Xv = \alpha(X)v \quad ({}^{\forall}X \in \mathfrak{s})$$

となる。α を v に対応する同時固有値といい、ある同時固有値に属する同時固有ベクトルの成す　V の部分空間を同時固有空間という。

3 Lie 環 $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現

このセクションでは、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ とする。

命題 3.1.
$j \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ について、$\mathfrak{g}(= \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ の、$2j+1$ 次元の既約表現 V_j を以下で定める事ができる。

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdot 2j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (2j-1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2j \cdot 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2j-2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2j-4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -2j \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、V_j を、$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のスピン j の既約表現と呼ぶ。また、V_j の最高ウェイトを

$$v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。

次の定理はよく知られている。

定理 3.2.
$\{V_j \mid j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現の同型類の完全代表系を与える。

4 アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造

以下、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), \widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ とする。

定義 4.1. (Cartan 部分代数 $\widehat{\mathfrak{h}}, \mathfrak{h}$)

Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$(または $\mathfrak{g}$) のそれぞれの Cartan 部分代数 $\widehat{\mathfrak{h}}, \mathfrak{h}$ を次で定義する。

$$\widehat{\mathfrak{h}} = \mathbb{C}H(0) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}\mathbf{d}$$
$$\mathfrak{h} = \mathbb{C}H$$

定義 4.2. (アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の分解)

アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対して、次の分解を定める。

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}}_{<0} \oplus \mathbb{C}F(0) \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}E(0) \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{>0} \tag{8}$$

ここで、

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{<0} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[\xi^{-1}]\xi^{-1} \tag{9}$$

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{>0} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[\xi]\xi \tag{10}$$

は、部分 Lie 環である。

定義 4.3.

アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上で考えた随伴作用に関する Cartan 部分代数 $\widehat{\mathfrak{h}}$ の同時固有値 α は、その双対空間 $\widehat{\mathfrak{h}}^*$ の元とする。この同時固有値であって、0 でない α を、$\widehat{\mathfrak{g}}$ のルートといい、そのルート全体を Δ とする。

定義 4.4. (ルート空間)

ルート α に対して、そのルート空間 $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ を次の様に定義する。

$$\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha = \{x \in \widehat{\mathfrak{g}} | [h, x] = \alpha(h)x \quad ({}^\forall h \in \widehat{\mathfrak{h}})\}$$

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus\nolimits_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \tag{11}$$

ここで、

$$\Delta = \{\alpha \in \widehat{\mathfrak{h}} \setminus \{0\} \,| \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \neq 0\}$$

この直和分解をルート空間分解といい、ルート空間 $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ の 0 以外の元を、α に対するルートベクトルという。

命題 4.5. (ルートと Lie 環の交換関係)
$^\forall\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ に対して、

$$[\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha, \widehat{\mathfrak{g}}_\beta] \subset \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta}$$

が成立する。ただし、$\alpha + \beta$ が、ルートでも 0 でもない時は、$\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta} = 0$,$\alpha + \beta = 0$ の時は、$\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta} = \widehat{\mathfrak{h}}$ とする。

Proof.
$x \in \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha, \quad y \in \widehat{\mathfrak{g}}_\beta$ とする。$^\forall h \in \widehat{\mathfrak{h}}$ に対して、Jacobi 恒等式を使うと、

$$\begin{aligned}
[h, [x, y]] &= [[h, x], y] + [x, [h, y]] \\
&= [\alpha(h)(x), y] + [x, \beta(h)(y)] \\
&= \alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] \\
&= (\alpha + \beta)(h)[x, y]
\end{aligned}$$

よって、

$$[x, y] \subset \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta}$$

となり、示せた。$\alpha + \beta$ が、ルートでも 0 でもない時は、Jacobi 恒等式を満たす 0 でない $\widehat{\mathfrak{g}}$ の元は存在しないので、$[x, y] = 0$ である。 □

系 4.6. (正のルート、負のルート)
アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の任意のルート $\alpha \in \Delta$ は、次の形で書ける。

$$\alpha = k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1$$

または、

$$\alpha = k_0\alpha_0 - k_1\alpha_1 \quad (k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

の形に書ける。ただし、$k_1 - k_0 \in 0, 1, -1$ である。従って、

$$\begin{aligned}
\Delta_+ &= \{k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 \in \Delta | k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\
\Delta_- &= \{-k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 \in \Delta | k_0, k_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\Delta = \Delta_+ + \Delta_-$$

である。ここで、Δ_+ を正のルート、Δ_- を負のルートという。

命題 4.7. (アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のルート)
$\alpha, \delta \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ を次の様に定義する。

$$\alpha_1(H(0)) = 2, \quad \alpha_1(K) = 0, \quad \alpha_1(d) = 0$$
$$\delta(H(0)) = 0, \quad \delta(K) = 0, \quad \delta(d) = 1$$

とすると、

$E(n)$ はルートベクトルで、対するルートは、$n\delta + \alpha_1$
$F(n)$ はルートベクトルで、対するルートは、$n\delta - \alpha_1$
$H(n)$ はルートベクトルで、対するルートは、$n\delta$

であり、$\widehat{\mathfrak{h}}$ はルート 0 に対する同時固有空間である。また、有限次元 Lie 環 $\mathfrak{g}$ のルートについても同様に、以下のように求まる。

E に対するルートは、α_1
F に対するルートは、$-\alpha_1$
H に対するルートは、0

であり、$\mathfrak{h}$ は、ルート 0 に対する同時固有空間である。

定義 4.8.
アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の単純ルートは、α_0, α_1 である。ただし、、α_0 は、$\alpha_0 = \delta - \alpha$

定義 4.9. (Chevalley 生成元)
アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の元 $e_i, f_i (i = 0, 1)$ を次の様に定める。

$$e_1 = E(0), \quad f_1 = F(0), \quad h_1 = H(0)$$
$$e_0 = F(1), \quad f_0 = E(-1), \quad h_0 = K - H(1)$$

この時、$[\widehat{\mathfrak{g}}, \widehat{\mathfrak{g}}] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ は、$e_i, f_i (i = 0, 1)$ で Lie 環として生成される。$e_i, f_i (i = 0, 1)$ を、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の Chevalley 生成元という。また、

$$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}h_1$$
$$\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}f_0 \oplus \mathbb{C}h_0$$

とおく。

命題 4.10.
4.9 で定めたアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の生成元 e_0, e_1 はそれぞれ、単純ルート $\alpha_0, \alpha_1 \in \Pi$ に対するルートベクトル、f_0, f_1 はそれぞれ、単純ルート $-\alpha_0, -\alpha_1 \in \Pi$ に対するルートベクトルである。また、$\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1$ は $\mathfrak{sl}_2$ に同型な Lie 環になる。

Proof.

$$\mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}h_1 = \mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}E(0) \oplus \mathbb{C}F(0) \oplus \mathbb{C}H(0)$$

については明らか。
《$\mathfrak{g}_0$ について示す。》

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}f_0 \oplus \mathbb{C}h_0, \quad e_0 \\ = F(1), \quad f_0 = E(-1), \quad h_0 = K - H(1) \quad \text{なので、}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_0, f_0] &= [F(1), E(-1)] = [F, E](0) \\ &= (F|E)K = [F, E](0) + K = -H(0) + K = h_0 \\ [e_0, h_0] &= [F(1), K - H(1)] = -[F(1), H(1)] \\ &= -[F, H](1) = [H, F](1) = -2F(1) = -2e_0 \\ [f_0, h_0] &= [E(-1), K - H(1)] = -[E(-1), H(1)] \\ &= -[E, H](-1) = [H, E](-1)2E(-1) = 2f_0\end{aligned}$$

よって、$\mathfrak{sl}_2$ と同型である。 □

$\widehat{\mathfrak{g}}$ のウェイト格子 $\widehat{P}$ を次の様に定義する。

$$\begin{aligned}\widehat{P} = \{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^* | \lambda(H(0)), \lambda(K - H(0)) \in \mathbb{Z}\} \\ \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1\end{aligned}$$

また、$\Lambda_0, \Lambda_1 \in \mathfrak{h}^*$ を次の様に定めると、

$$\begin{cases}\Lambda_1(H(0)) = 1 \\ \Lambda_1(K) = 1 \\ \Lambda_1(\mathbf{d}) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda_0(H(0)) = 0 \\ \Lambda_0(K) = 1 \\ \Lambda_0(\mathbf{d}) = 0 \end{cases}$$

$\widehat{P} = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1$ となる。

系 4.11.

PBW の定理より次が得られる。(8) の三角分解より、ベクトル空間としての同型が成立する。

$$U(\hat{\mathfrak{g}}) \simeq U(\hat{\mathfrak{g}}_{<0}) \otimes \mathbb{C}[F(0)] \otimes U(\widehat{\mathfrak{h}}) \otimes \mathbb{C}[E(0)] \otimes U(\hat{\mathfrak{g}}_{>0}) \tag{12}$$

また、$\mathfrak{g}$ についてもベクトル空間としての同型が成立する。

$$U(\mathfrak{g}) \simeq \bigoplus_{i,j,k\geq 0} \mathbb{C}F^iH^jE^k$$

5　アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ の表現

定義 5.1. (可積分表現)

Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 V が次を満たす時、V を可積分表現という。

1. 「Cartan 部分代数の作用が対角化可能である。」

   つまり、V が $\widehat{\mathfrak{g}}$ の場合は、$H(0), K, d$ の同時固有空間の直和に分解可能である。

2. 「Chevalley 生成元の作用が局所巾零である。」

   つまり、$^\forall v \in V$ に対して、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の場合は、ベクトル空間 $U(\mathfrak{g}_0)v, U(\mathfrak{g}_1)v$ が有限次元になる。

ここで、局所巾零であるとは、$^\forall v \in V, ^\forall x \in \mathfrak{g}, ^\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$x^kv = 0 \quad (k \geq n)$$

となること、つまり有限次元であることをいう。

事実 5.2.
任意の $\mathfrak{g}$ の可積分表現 V は完全可約である。

定義 5.3. (ウェイト)
Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現 V に対して、その Cartan 部分代数に対する同時固有値 $\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ をウェイト、λ に対する同時固有空間 $V_{(\lambda)}$ をウェイト空間、各 $V_{(\lambda)}$ の元をウェイトベクトルという。また、直和分解

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} V_{(\lambda)}$$

を、ウェイト空間分解という。

注意 5.4.
随伴表現の場合には、ウェイトの代わりにルートとよんで区別する。

命題 5.5.
Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現 V をとる。$\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*$ を V のウェイト、$\lambda \in \Delta \cup \{0\}$ とすると、λ に対するウェイト空間 $V_{(\lambda)}$ と、α に対するルート空間 $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ に対して、

$$\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha V_{(\lambda)} \subset V_{(\lambda+\alpha)}$$

である。ただし、$V_{(\lambda+\alpha)} = 0$ も許す。

Proof.

$$\begin{aligned} V_{(\lambda)} &= \{v \in V \mid hv = \lambda(h)v, {}^\forall h \in \widehat{\mathfrak{h}}^*\} \\ \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha &= \{x \in \widehat{\mathfrak{g}} \mid \mathrm{ad}(h)x = \alpha(h)x\} \end{aligned}$$

とする。つまり、$h(xv) = (\lambda + \alpha)(h)xv$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} h(xv) &= x(hv) + \mathrm{ad}(h)xv \\ &= x(hv) + \alpha(h)xv \\ &= x\lambda(h)v + \alpha(h)xv \\ &= (\lambda + \alpha)(h)xv \end{aligned}$$

□

命題 5.6. (部分表現)
V を Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現としたとき、次で定義される部分空間 W は V の部分表現となる。

$$W = \{v \in V \mid kv = lv\}$$

Proof.
•${}^\forall v_1, v_2 \in W$ に対して、

$$kv_1 + kv_2 = lv_1 + lv_2 \Longleftrightarrow k(v_1 + v_2) = l(v_1 + v_2)$$

よって、$v_1 + v_2 \in W$
•${}^\forall a \in \mathbb{C}, {}^\forall v \in W$ に対して、

$$k(av) = a(kv) = a(lv) = l(av) \qquad \text{よって、} av \in W$$

従って、W は V の部分空間である。また、${}^\forall x \in \widehat{\mathfrak{g}}, {}^\forall v \in W$ に対して、

$$k(xv) = x(kv) = x(lv) = l(xv) \qquad \text{よって、} xv \in W$$

以上より、W は V の部分表現である。 □

定義 5.7.
$l \in \mathbb{C}$ に対して、アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 $\mathcal{H}$ がレベル l であるとは、$\mathcal{H}$ 上で、

$$k = l \cdot id$$

と作用する事とする。

以下では、$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を一つ固定して、レベル l の可積分表現を考える。

定義 5.8. (三角分解)
アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 環　$\widehat{\mathfrak{n}}_+, \widehat{\mathfrak{n}}_-$ を次の様に定義する。

$$\widehat{\mathfrak{n}}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha = \widehat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[\xi]\xi \oplus \mathbb{C}E(0) \tag{13}$$

$$\widehat{\mathfrak{n}}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_-} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha = \widehat{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[\xi^{-1}]\xi^{-1} \oplus \mathbb{C}F(0) \tag{14}$$

すると、以下のような $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Lie 環による直和分解が得られる。

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{n}}_- \oplus \widehat{\mathfrak{h}} \oplus \widehat{\mathfrak{n}}_+ \tag{15}$$

この分解をアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の三角分解という。

Proof.

$(well-defined$ 示す)

$^\forall x,y\in\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ に対して $x\in\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$、$y\in\widehat{\mathfrak{g}}_\beta$ なので、$\alpha\in\Delta_+$、$\beta\in\Delta_+$ 従って、

$$[x,y]\neq 0\Longrightarrow[x,y]\in\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+\beta}$$

よって、$\alpha+\beta\in\Delta_+$

Δ_- についても同様に示す事が出来る。。 □

系 5.9. (同型)

PBW の定理より次が得られる。(15) の三角分解より、ベクトル空間としての同型が成立する。

$$U(\widehat{\mathfrak{g}})\simeq U(\widehat{\mathfrak{n}}_-)\otimes U(\widehat{\mathfrak{h}})\otimes U(\widehat{\mathfrak{n}}_+) \tag{16}$$

定義 5.10. ($\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 $\mathcal{H}$ の最高ウェイト表現)

アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 V 関して、ある $|u>\in V, |u>\neq 0$ で、次を満たすものが存在する時、V は、最高ウェイト表現であるという。

$$\begin{aligned}&(1)\widehat{\mathfrak{n}}_+\,|\,u>=0\\&(2)\,|\,u>\text{ はウェイトベクトル}\\&(3)V=U(\widehat{\mathfrak{g}})\,|\,u>\text{ つまり、}\mathcal{H}\text{ は }|\,u>\text{ で生成される。}\end{aligned}$$

この時、$|u>$ を最高ウェイトベクトル、$|u>$ のウェイトを最高ウェイトという。最高ウェイト表現は、ウェイト分解を持つ。

注意 5.11.

定義 5.10 の条件を最高ウェイトベクトルというのは次の理由からである。まず、$\widehat{\mathfrak{h}}^*$ について、次の大小関係を考える事が出来る。$\lambda,\mu\in\widehat{\mathfrak{h}}^*$ が次を満たす時 $\lambda\geq\mu$ とする。

$$\lambda-\mu\in\{k_0\alpha_0+k_1\alpha_1\mid k_0,k_1\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

すると、最高ウェイトベクトルの定義より、$|u>$ を $\mathcal{H}$ の最高ウェイトベクトルとすると、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=U(\widehat{\mathfrak{g}})\,|\,u>\\&=U(\widehat{\mathfrak{n}}_-)\,|\,u>\\&=\{X_1(-n_1)\cdots X_r(-n_r)v;X_i\in\mathfrak{g},X_i\in\widehat{\mathfrak{n}}_-,n_i\geq 0,n=0\}\end{aligned}$$

となる。従って、命題 4.7 と 5.5 より、$|\, u >$ のウェイトは、上で定めた大小関係から、$\mathcal{H}$ のウェイトの中で最大のウェイトになる。

定義 5.12.
可積分表現 V の形式指標を次で定める。

$$\mathrm{ch}V = \Sigma_{\lambda \in \widehat{\mathfrak{h}}^*} z^{\lambda(H(0))} q^{-\lambda(d)} \dim V_{(\lambda)}.$$

事実 5.13 (Kac).
$l = 1$ の時、

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\,\mathcal{L}_0 &= \Sigma z^{2n} q^{n^2} \Pi_{i \geq 1}(1-q^i)^{-1} \\ \mathrm{ch}\,\mathcal{L}_1 &= \Sigma z^{(2n+1)} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \Pi_{i \geq 1}(1-q^i)^{-1}\end{aligned}$$

が成立する。

$\mathfrak{g}$ の可積分表現について、次の定理はよく知られている。

命題 5.14.
$\widehat{\mathfrak{g}}$ の可積分表現 V を $\mathfrak{g}$ の表現に制限したものは、$\mathfrak{g}$ の表現として完全可約である。

Proof.
$^\forall v$ に対して、V の可積分性より、$U(\mathfrak{g})v$ は有限次元である。従って、$\mathfrak{g}$ の有限次元表現の完全可約性より、v はある既約表現の直和に含まれる。V の任意のベクトルは、既約な部分表現の和で書ける。よって、V は完全可約である。 □

以下、

$$P_l \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} | \quad 0 \leq j \leq \frac{l}{2} \}$$

とし、しばらく、レベル $l \in \mathbb{N}$ を固定する。

定義 5.15. (V_j の拡張)
$\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ を

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{g} + \widehat{\mathfrak{h}}) \otimes \widehat{\mathfrak{g}}_{>0}$$

で定める。この時、$\mathfrak{g}$ のスピン j の既約表現 V_j は以下の様にして $\widehat{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ の表現とみなせる。

$$\mathbf{d}\cdot V_j = 0, \quad K\cdot V_j = l, \quad \widehat{\mathfrak{g}}_{>0}\cdot V_j = 0$$

アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の誘導表現 M_j を、

$$M_j = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{g}}_{(\geq 0)})} V_j$$

で定義する。 M_j はレベル l、スピン j の Weyl 加群と呼ばれる。

$\mid j >\in 1\otimes v_j (\in M_j)$ を最高ウェイトベクトルとして持つ M_j は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト表現ではあるが、定義より $^\forall k \in \mathbb{N}$ に対して、

$${f_0}^k V_j \neq 0$$

なので、可積分表現ではない。

定義 5.16.
$j \in P_l$ の時、アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約表現 $\mathcal{L}_j$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{L}_j = M_j / U(\widehat{\mathfrak{g}}(f^{l-2j+1} \mid j >)$$

定理 5.17. (Kac)
$j \in P_l$ の時、$\mathcal{L}_j$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の 0 でない既約な可積分表現である。さらに、

$$\{\mathcal{L}_j \mid j = 0, 1, \ldots, l\}$$

は、レベル l の既約な可積分表現の同型類の完全代表系を与える。

6 Heisenberg 代数の表現

命題 6.1. ($\mathcal{B}$ の表現)
Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の表現とは、次を満たすものである。

$$\begin{aligned}
&\pi : \mathcal{B} \mapsto End_{\mathbb{C}}[x_1, x_2, \cdots] \\
&a_n \mapsto \frac{\partial}{\partial x_n} \\
&a_{-n} \mapsto n x_n \\
&a_0 \mapsto 0 \\
&c \mapsto id
\end{aligned}$$

Proof.

$$\pi[a_0, a_n] = [\pi(a_0), \pi(a_n)]$$

ここで、$[a_0, a_n] = 0$ 同様に、$[a_0, a_{-n}] = 0, [a_{-n}, a_0] = 0$ である。また、関数 f をとると、

$$\begin{aligned}[\frac{\partial}{\partial x_m}, nx_n]f &= \frac{\partial}{\partial x_n}(nx_n f) - nx_n\frac{\partial}{\partial x_m}f \\ &= n\delta_{m,n}f + nx_n f' - nx_n f' = n\delta_{m,n}f\end{aligned}$$

よって、

$$[\frac{\partial}{\partial x_m}, nx_n] = n\delta_{m,n}$$

同様にして、

$$[nx_n, \frac{\partial}{\partial x_m}] = -n\delta_{m,n}$$

も得られるので、上は $\mathcal{B}$ の表現である。 □

a_0 に対応する変数 x_0 を導入し、上の命題を一般化した表現を考える。

定義 6.2. ($\mathcal{B}$ の一般的な表現)
$\mathcal{B}$ の $\mathcal{F}_\lambda = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]e^{\lambda x_0}$ 上への表現を次の様に与える。

$$\begin{aligned}&a_0 \longmapsto \lambda id \\ &c \longmapsto id \\ &a_n \longmapsto \frac{\partial}{\partial x_n} \\ &a_{-n} \longmapsto nx_n \quad (n \in \mathcal{N}) \\ &\mid \lambda > \longmapsto e^{\lambda x_0}\end{aligned}$$

この表現で、$\mid \lambda >$ は、a_0 の固有ベクトルであり、$a_0 \mid \lambda >= \lambda \mid \lambda >$ となる。

定義 6.3. (最高ウェイト表現)
Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の表現 V について、0 でないベクトル $v_0 \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、次を満たすものが存在する時、V は、λ を最高ウェイトとする最高ウェイト表現であるという。

1. v_0 に対して、a_n は次の様に作用する。

$$a_n v_0 = 0({}^{\forall} n > 0)$$
$$a_0 v_0 = \lambda v_0$$

2. V は $a_{-n}(n > 0)$ で、v_0 から生成される。

   つまり、

$$V = \Sigma_{(m_1,m_2,\cdots)} \mathbb{C} a_{-1}^{m_1} a_{-2}^{m_2} \cdots v_0$$

ただし、$(m_1, m_2, \cdots)$ の全ての m_i は $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ であり、有限個の i を除いて、0 となる全ての組について和をとるものとする。この時、v_0 は最高ウェイト表現であるという。

命題 6.4.

$\mathcal{B}$ の表現 $\mathcal{F}_\lambda$ は、$\mid \lambda >$ を最高ウェイトベクトルとする最高ウェイトが λ の最高ウェイト表現である。

Proof.

$$\mathcal{F}_\lambda = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]1 \cong \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots] \otimes \mathbb{C} \mid \lambda >$$

であり、

$$\mid \lambda >= 1 \otimes \mid \lambda >$$

である。まず、

$$a_n \cdot 1 = \frac{\partial}{\partial x_n} 1 = 0,$$
$$a_0 \cdot 1 = \lambda id = \lambda$$

ここで、$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in \mathcal{F}_\lambda$ は、

$$x_1 = a_{-1} \mid \lambda >$$
$$x_2 = \frac{1}{2} a_{-2} \mid \lambda >$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{1}{n} a_{-n} \mid \lambda >$$

であるので、$x_1x_2 = 1\cdot\dfrac{1}{2}a_{-1}a_{-2} \mid \lambda>$ となり、$\mathcal{F}_\lambda$ の基底は $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]$ である事が分かる。従って、

$$(a_{-1})^{n_1}(\frac{1}{2}a_{-2})^{n_2}\cdots \mid \lambda> = x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots \qquad (n_i \geq 0 \text{ で有限個の } n_i \text{を除いて } 0)$$

が得られる。 □

定義 6.5. ($\mathcal{B}$ と $\mathcal{F}_\lambda$ の次数付け)
　Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ とその表現 $\mathcal{F}_\lambda$ を次の様に次数付ける。

$$\deg a_n = -n$$

$$\deg c = 0$$

$$\deg x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots \mid \lambda> = \Sigma_{j\in\mathbb{N}} jm_j$$

但し、$(m_1, m_2, \cdots)$ は、$m_j \geq 0$ で有限個の i を除いて $m_i = 0$ とする。

定義 6.6.
　上の定義で定めた次数による $\mathcal{F}_\lambda$ の d 次の部分空間 $\mathcal{F}_\lambda(d)$ を次の様に定める。

$$\mathcal{F}_\lambda = \bigoplus_{d\geq 0}\mathcal{F}_\lambda(d)$$

$$\mathcal{F}_\lambda(d) = \{v \in \mathcal{F}_\lambda \mid \deg v = d\} = \mathrm{span}\,\{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots \mid \lambda> \mid \Sigma jm_j = d\}$$

命題 6.7.
　Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の元 a_n は上の次数付けで、次数を n 下げる。つまり、

$$a_n\mathcal{F}_\lambda(d) \subset \mathcal{F}_\lambda(d-n)$$

Proof.
　$\mathcal{F}_\lambda(d) \ni (x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots)$ について、

$$a_n(x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots) \in \mathcal{F}_\lambda(d-n)$$

を示せばよい

(1)$n \geq 0$ について

$$a_{-n}(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots) = nx_n(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}\cdots) \quad = n(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n+1}\cdots)$$

ここで、Σjm_j が d 次元 ($d = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots$) なので、

$$m_1 + m_2 + \cdots n(m_n + 1) = m_1 + m_2 + \cdots nm_n + n = d + n$$

(2)$n < 0$ について

$$\begin{aligned} a_n(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots) &= \frac{\partial}{\partial x_n}(x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}\cdots) \\ &= x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}x_n^{m_n}\cdots = x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots m_n x_n^{m_n-1}\cdots \\ &= m_n x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_n^{m_n-1}\cdots \end{aligned}$$

ここで、

$$m_1 + 2m_2 + \cdots nm_n - 1 = m_1 + 2m_2 + \cdots nm_n - n = d - n$$

よって、以上より、

$a_n\mathcal{F}_\lambda(d) \subset \mathcal{F}_\lambda(d-n)$ が示せた。

□

定義 6.8. (表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ の次元と指標)
表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ の次元は、

$$\dim \mathcal{F}_\lambda(d) = \sharp\left\{(m_1, m_2, \cdots)|d = \Sigma jm_j\right\} = p(d)$$

である。ここで、$p(d)$ は d の分割数である。さらに、$\dim\mathcal{F}_\lambda(d)$ の母関数 $\mathrm{ch}\,\mathcal{F}_\lambda$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\,\mathcal{F}_\lambda &\overset{\mathrm{def}}{=} \Sigma_{d\geq 0}\dim\mathcal{F}_\lambda(d)q^d \\ &= \Sigma_{d\geq 0}p(d)q^d \\ &= \Pi_{n\geq 1}^{\infty}(1-q^n)^{-1} \end{aligned}$$

となる。

定義 6.9.
双対空間 $\mathcal{F}_\lambda^*$ を次で定める。

$$\mathcal{F}_\lambda^* = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]|\, \lambda >$$

ここで、$\mathcal{F}_\lambda$ の基底は、$\{a_{-1}^{n_1}a_{-2}^{n_2}\cdots \mid \lambda > | n_i \geq 0, 0$ でない n_i は有限個$\}$ $\mathcal{F}_\lambda^*$ の基底は $\{< \lambda\, | a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots | n_i \geq 0, 0$ でない n_iは有限個$\}$ である。

命題 6.10. (双線形写像)
次を満たす非退化双線形写像

$$\begin{array}{ccccc} <\,,\,> & : & \mathcal{F}_\lambda^* \times \mathcal{F}_\lambda & \to & \mathbb{C} \\ & & (v, w) & \mapsto & < v|w > \end{array}$$

がただひとつ存在する:

$$< \lambda \mid \lambda >= 1$$
$$< a_n v \mid w >=< v \mid a_{-n} w >$$

Proof.
双線形写像$<\,,\,>$を

$$< \lambda|a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots|\ldots a_{-2}^{n_2}a_{-1}^{n_1}|\lambda >= n_1!n_2!\cdots c_(n_1, n_2, \cdots)|\lambda > \tag{17}$$

で定めると、これは命題の条件を満たす. □

命題 6.11.
$\mathcal{F}_\lambda$ は $\mathcal{B}$ の表現として既約である。

Proof.
$V \subset \mathcal{F}_\lambda$ を 0 でない任意の部分表現とする。0 でないベクトル $v \in V$ をとり、

$$v = \Sigma_{(m_1,m_2,\cdots)}c_{(m_1,m_2,\cdots)}x^{m_1}x^{m_2}\cdots|\lambda >$$

とおく。$c_{(m_1,m_2,\cdots)} \neq 0$ なる $(m_1, m_2, \cdots)$ のうち、和 $(m_1 + m_2 + \cdots)$ が最大となるものの一つを $(n_1, n_2, \cdots)$ とする。この時、

$$\begin{aligned} &(a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots)v \\ &= c_{(n_1,n_2,\cdots)}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots|\lambda > \\ &= n_1!n_2!\cdots c_(n_1, n_2, \cdots)|\lambda > \end{aligned}$$

従って、$|\lambda>\in V$ であり、

$$a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots|\lambda>\in V\Longrightarrow x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots|\lambda>$$

と表せ、$V=\mathcal{F}_\lambda$ を得る。 □

定義 6.12. (カレント $a(z)$ の定義)
z を変数、a_n を係数とする次の形式級数をボゾン場という。

$$a(z)\overset{\text{def}}{=}\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^{-n-1}$$

定義 6.13. (正規順序)
Heisenberg 代数 $\mathcal{B}$ の正規順序とは、$a_n(n\in\mathbb{Z})$ を変数とする多項式環 $\mathbb{C}[a_n(n\in\mathbb{Z})]$ から、$\mathcal{B}$ の普遍包絡環 $U(\mathcal{B})$ への線形写像 $:\cdots:$ で、次を満たすものをいう。

$$\begin{aligned}&\mathbb{C}[a_n(n\in\mathbb{Z})]\longrightarrow U(\mathcal{B})\\&:a_{i_1}^{m_1}a_{i_2}^{m_2}\cdots a_{i_s}^{m_s}:\overset{\text{def}}{=}a_{i_1}^{m_1}a_{i_2}^{m_2}\cdots a_{i_s}^{m_s}\qquad(i_1<i_2<\cdots<i_s)\end{aligned}$$

命題 6.14.
正規順序で考えた次の合成

$$:a(z)a(w):=\Sigma_{m,n}a_ma_nz^{-n-1}w^{-n-1}$$

は、$^\forall<\varphi|\in\mathcal{F}_\lambda^*,^\forall|u>\in\mathcal{F}_\lambda$ に対して

$$<\varphi|:a(z)a(w):|u>\in\mathbb{C}[z,z^{-1},w,w^{-1}]$$

を満たす。

Proof.
$a_n\mathcal{F}_\lambda(d)\subset\mathcal{F}_\lambda(d-n),a_n\mathcal{F}_\lambda^*(d)\subset\mathcal{F}_\lambda^*(d+n)$ より、$d<n$ なる n に対して、$\mathcal{F}_\lambda$(マイナス) $=0$ となるので、十分大きな n について考えると、$a_n|u>=0,<\varphi|a_n=0$ である。ここで、$:a_ma_n:=:a_na_m:$ だから、

$$\begin{aligned}&<\varphi|:a(z)a(w):|u> &(18)\\&=\Sigma_{m,n\in\mathbb{Z}}<\varphi|:a_ma_n:|u>z^{-n-1}w^{-n-1} &(19)\end{aligned}$$

更に、$^\forall<\varphi|\in\mathcal{F}_\lambda^*(d)',^\forall|u>\in\mathcal{F}_\lambda(d)$ に対して、　$a_n\mathcal{F}_\lambda^*(d)\subset\mathcal{F}_\lambda^*(d+n)$ であることより、(19) の右辺 $=\Sigma_{m,n\in\mathbb{Z},-d'\leq m+n\leq d}<\varphi|:a_ma_n:|u>z^{-n-1}w^{-n-1}$ となり、(19) は有限和となる □

命題 6.15.

$\mathcal{F}_\lambda^*$ 上の a_n の作用は、次数を n 上げる。つまり、$a_n\mathcal{F}_\lambda^*(d) \subset \mathcal{F}_\lambda^*(d+n)$

命題 6.16. (OPE(作用素積展開))

$^\forall < \varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*, ^\forall |u> \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して $< \varphi|a(z)a(w)|u >$ は、$|z| > |w| > 0$ で絶対収束し、また、この領域で

$$< \varphi|a(z)a(w)|u >= \frac{1}{(z-w)^2} < \varphi|u > + < \varphi| : a(z)a(w) : |u > \tag{20}$$

を満たす。従って $a(z)a(w)$ は、$(z,w) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の 2 変数作用素値関数であり、その極が、$z = 0, \infty, z = w$ にあるものに解析接続される。以後、

$$a(z)a(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + : a(z)a(w) : \tag{21}$$

と書き、これを、OPE(作用素積展開) という。これは、極 $z = w$ での singular part(特異部分) の様子を表す式である。

Proof.

$$< \varphi|a(z)a(w)|u > - < \varphi| : a(z)a(w) : |u > \tag{22}$$

を考える。

$$\begin{aligned}
(22) &= \Sigma_{m,n\in\mathbb{Z}} a_m a_n z^{-n-1} w^{-n-1} - \Sigma_{m,n\in\mathbb{Z}} : a_m a_n : z^{-n-1} w^{-n-1} \\
&= \Sigma_{m>n} a_m a_n z^{-n-1} w^{-n-1} - \Sigma_{m>n} : a_m a_n : z^{-n-1} w^{-n-1} \\
&= \Sigma_{m>n} \langle \varphi | [a_m a_n] | u \rangle \, z^{-n-1} w^{-n-1} \\
&= \Sigma_{m>n} \langle \varphi | m\delta_{m+n,0} c | u \rangle \, z^{-n-1} w^{-n-1} \\
&= \Sigma_{m>n} \langle \varphi | m | u \rangle \, z^{-n-1} w^{-n-1} \\
&= \Sigma_{m>n} m z^{-n-1} w^{-n-1} \langle \varphi | u \rangle \\
&= \Sigma_{m>n} m \left(\frac{1}{z^2}\right) \left(\frac{w}{z}\right)^{m-1} < \varphi|u >
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z(1-\frac{w}{z})} \\
&= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{w}{z} + \left(\frac{w}{z}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{z}\Sigma_{m=0}^{\infty}\left(\frac{w}{z}\right)^m
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-w)^2} &= \frac{\partial}{\partial w}\frac{1}{z-w} \\ &= \frac{\partial}{\partial w}\frac{1}{z}\Sigma_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{w}{z}\Big)^m \\ &= \frac{1}{z}\Sigma_{m=0}^{\infty} m\frac{w^{m-1}}{z^m} \\ &= \frac{1}{z}\cdot m\cdot\frac{1}{z}\Big(\frac{w}{z}\Big)^{m-1} \\ &= \Big(\frac{1}{z^2}\Big)\Sigma_{m>n} m\Big(\frac{w}{z}\Big)^{m-1}\end{aligned}$$

よって、$|z|>|w|>0$ において、

$$<\varphi|a(z)a(w)|u> - <\varphi| : a(z)a(w) : |u> = \frac{1}{(z-w)^2} <\varphi|u>$$

である。 □

系 6.17.

領域 $|z|>|w|>0$ で定義された $a(z)a(w)$ と、領域 $|w|>|z|>0$ で定義された $a(w)a(z)$ は、解析接続すると、$z,w\in\mathbb{P}^1$ の作用素値有理関数として一致する。つまり、

$$a(z)a(w) = a(w)a(z)$$

である。従って、$^\forall <\varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*, ^\forall |u> \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して、解析接続すると、

$$<\varphi|a(z)a(w)|u> = <\varphi|a(w)a(z)|u>$$

を満たす。

定義 6.18.

$\lambda=0$ の時、最高ウェイトベクトル $^\forall\langle 0| \in \mathcal{F}_0^*, ^\forall |0\rangle \in \mathcal{F}_0$ を、

$$<0|0> = 1$$

と正規化する。また、作用素値有理関数 $F(z_1,\cdots,z_k)$ に対して、その真空期待値を次で定める。

$$<F(z_1,\cdots,z_k)> = <0|F(z_1,\cdots,z_k)|0> \tag{23}$$

系 6.19. (真空期待値)
$a(z)a(w)$ の真空期待値は、

$$<: a(z)a(w) :>= 0 \tag{24}$$

$$< a(z)a(w) >= \frac{1}{(z-w)^2} \tag{25}$$

Proof.
《(24) の証明》

$$\begin{aligned}
<: a(z)a(w) :> &=< 0| : a(z)a(w) : |0 > \\
&= \Sigma_{m,n\in\mathbb{Z}} <: a_m a_n :> z^{-n-1}w^{-n-1} \\
&= \Sigma_{m<0,n\in\mathbb{Z}} < a_m a_n > z^{-n-1}w^{-n-1} \\
&+ \Sigma_{m\geq 0,n\in\mathbb{Z}} < a_m a_n > z^{-n-1}w^{-n-1} \qquad (\ast)
\end{aligned}$$

ここで、$m < 0$ の時、$< 0|a_m = 0$、　$m > 0$ の時、$a_m|0 >= 0,\quad a_0|0 >= 0$
なので、(※) の右辺 $= 0$
《(25) の証明》

$$\begin{aligned}
< a(z)a(w) >=< 0|a(z)a(w)|0 > &= \frac{< 0|id|0 >}{(z-w)^2} + < 0| : a(z)a(w) : |0 > \\
&= \frac{< 0|0 >}{(z-w)^2} + < 0| : a(z)a(w) : |0 >= \frac{1}{(z-w)^2}
\end{aligned}$$

□

注意 6.20.
ここで、次の関係が成り立つ事に注意する。

$$a(z)a(w) =: a(z)a(w) : + < a(z)a(w) >$$

定義 6.21. (作用素値有理関数)
(エネルギー運動量テンソルと呼ばれる) 作用素値有理関数 $T(z)$ と、Fourier　mode　L_n を次で定める。

$$T(z) = \frac{1}{2} : a(z)a(w) : \tag{26}$$

$$T(z) = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-1} \tag{27}$$

前の命題より、$a(z)^2$ は発散するが、(26) は正規順序を導入しているので、$^\forall < \varphi| \in \mathcal{F}_\lambda^*, ^\forall |u> \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して、行列要素 $< \varphi|T(z)|u >$ は次を満たす。

$$< \varphi|T(z)|u > \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

定理 6.22. (Wick の定理)

$\mathcal{F}_\lambda$ 上の変数 $z_1^{(1)}, \cdots, z_{i_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \cdots, z_{i_2}^{(2)}, \cdots, z_{i_k}^{(k)}$ の作用素値関数の合成に対して次が成立する。

$$\begin{aligned}
&: a(z_1^{(1)}) \cdots a(z_{i_1}^{(1)}) :: a(z_1^{(2)}) \cdots a(z_{i_2}^{(2)}) : \cdots : a(z_1^{(k)}) \cdots a(z_{i_k}^{(k)}) : \\
&= \Sigma \langle a(z_{jp_1}^{(p_1)}) a(z_{jq_1}^{(q_1)}) \rangle \cdots \langle a(z_{jp_n}^{(p_n)}) a(z_{jq_n}^{(q_n)}) \rangle : \cdots \check{a}(z_{jp_1}^{(p_1)}) \cdots \check{a}(z_{jq_1}^{(q_1)}) \cdots \check{a}(z_{jp_n}^{(p_n)}) \cdots \check{a}(z_{jq_n}^{(q_n)}) :
\end{aligned}$$

ここで、$n \geq 0, p_1 < q_1, \cdots, p_n < q_n$ であり、右辺の和はこの様な条件を満たす全ての組についてとる。また、$: \cdots \check{a}(z_{jp_1}^{(p_1)}) \cdots \check{a}(z_{jq_1}^{(q_1)}) \cdots \check{a}(z_{jp_n}^{(p_n)}) \cdots \check{a}(z_{jq_n}^{(q_n)}) :$ は、$a(z_{jp_1}^{(p_1)}), a(z_{jq_1}^{(q_1)}), \cdots, a(z_{jp_n}^{(p_n)}), a(z_{jq_n}^{(q_n)})$ を除いた全ての組について正規順序で積をとったものである。

《Wick の定理の例》

$$\begin{aligned}
a(z_1)a(z_2)a(z_3) =&: a(z_1)a(z_2)a(z_3) : + \langle a(z_1)a(z_2) \rangle \, a(z_3) \\
&+ \langle a(z_1)a(z_3) \rangle \, a(z_2) + \langle a(z_2)a(z_3) \rangle \, a(z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(z_1)a(z_2)a(z_3)a(z_4) =&: a(z_1)a(z_2)a(z_3)a(z_4) : \\
&+ \Sigma \langle a(z_{i_1})a(z_{i_2}) \rangle : a(z_{j_1})a(z_{j_2}) : + \Sigma \langle a(z_{i_1})a(z_{i_2}) \rangle \, \langle a(z_{j_1})a(zj_2) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
: a(z_1)a(z_2) : a(z_3) =&: a(z_1)a(z_2)a(z_3) : \\
&+ \langle a(z_1)a(z_3) \rangle \, a(z_2) + \langle a(z_2)a(z_3) \rangle \, a(z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
: a(z_1)a(z_2) :: a(z_3)a(z_4) :=&: a(z_1)a(z_2)a(z_3)a(z_4) : + \langle a(z_1)a(z_3) \rangle : a(z_2)a(z_4) : \\
&+ \langle a(z_1)a(z_4) \rangle : a(z_2)a(z_3) : + \langle a(z_2)a(z_3) \rangle : a(z_1)a(z_4) : \\
&+ \langle a(z_2)a(z_4) \rangle : a(z_1)a(z_3) : + \langle a(z_1)a(z_3) \rangle \, \langle a(z_2)a(z_4) \rangle \\
&+ \langle a(z_1)a(z_4) \rangle \, \langle a(z_2)a(z_3) \rangle
\end{aligned}$$

命題 6.23.

第 3 章で定義した $V_\lambda(z)$ は $\mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ なる $\mathbb{P}^1$ 上の $z = 0, \infty$ で分岐点を持つ多値関数となる。つまり、$^\forall < \varphi | \in \mathcal{F}_{\lambda+\mu}, ^\forall | u > \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して、

$$< \varphi|V_\mu(z)|u > \in z^{\lambda\mu}\mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

を満たす。

注意 6.24.

前の命題において、$\lambda\mu \notin \mathbb{Z}$ の時、$<\varphi| \in \mathcal{F}^*_{\lambda+\mu}, |u> \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して、$<\varphi \mid V_\mu(z) \mid u>$ は $z^{\lambda\mu}$ の形の因子を持つので多値性が現れる事に注意する。

命題 6.25. ($T(z)a(w)$,$T(z)T(w)$ の singular　part)

作用素値 Laurent 級数　$T(z)a(w)$ は $|z|>|w|>0$ で、$a(w)T(z)$ は $|w|>|z|>0$ で、$T(z)T(w)$ は $|z|>|w|>0$ でそれぞれ絶対収束し、$z, w = 0, \infty, z = w$ にのみ極を持つ有利関数に解析接続される。さらに、$z = w$ の周りでの singular　part は、次の様になる。

$$T(z)a(w) \sim a(z)T(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}a(z) + \frac{1}{z-w}\partial_w a(w) \tag{28}$$

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4}id + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \tag{29}$$

ただし、$(\sim)$ は、「$z = w$ の周りでの正則を除いて一致」の意味である。

Proof.

《(28) の証明》

Wick の定理を用いると、

$$\begin{aligned}
&T(z)a(w) = \frac{1}{2} : a(z)^2 : a(w) \\
&= \frac{1}{2} : a(z)^2 a(w) : + \frac{1}{2} < a(z)a(w) > a(z) + \frac{1}{2} < a(w)a(z) > a(z) \\
&= \frac{1}{2} : a(z)^2 a(w) : + < a(z)a(w) > a(z)
\end{aligned}$$

ここで、$\frac{1}{2} : a(z)^2 a(w) :$ は $z = w$ で正則であることを証明する。　$^\forall <\varphi| \in \mathcal{F}^*_\lambda, {}^\forall |u> \in \mathcal{F}_\lambda$ に対して、$<\varphi \mid \frac{1}{2} : a(z)a(z)a(w) : \mid u>$ が正則であることを示せばよい。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} < \varphi |: a(z)a(z)a(w) :| u > \\
&= \frac{1}{2} \Sigma_{m,n,l\in\mathbb{Z}} < \varphi |: a_m a_n a_l :| u > z^{-m-1} z^{-n-1} w^{-l-1}
\end{aligned}$$

ここで、

$$a_m a_n a_l \mathcal{F}_\lambda(d) \subset \mathcal{F}_\lambda(d-m-n-l)$$

より、

$$: a_m a_n a_l : \mathcal{F}_\lambda(d) \subset \mathcal{F}_\lambda(d-m-n-l)$$

である。従って、$d-m-n-l \geq 0$、つまり、$d \geq m+n+l$ で考えるので

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} < \varphi \mid : a(z)a(z)a(w) : \mid u > \\
&= \frac{1}{2}\Sigma_{m,n,l\in\mathbb{Z}} < \varphi \mid : a_m a_n a_l : \mid u > z^{-m-1} z^{-n-1} w^{-l-1}
\end{aligned}$$

は有限和となり、$\frac{1}{2} < \varphi \mid : a(z)a(z)a(w) : \mid u > \in \mathbb{C}[z, z^{-1}, w, w^{-1}]$ なので正則である。また、

$$< a(z)a(w) > a(z) = \frac{1}{(z-w)^2} a(z)$$

であるので、

$$\begin{aligned}
< \varphi \mid \frac{1}{(z-w)^2} a(z) \mid u > &= \frac{1}{(z-w)^2} < \varphi \mid a(z) \mid u > \\
&= \frac{1}{(z-w)^2} \Sigma < \varphi \mid a_n \mid u > z^{-n-1}
\end{aligned}$$

さらに、$a(z)$ を、テーラー展開すると、

$$a(z) = a(w) + \partial_w a(w)(z-w) + \frac{1}{2}\partial_w{}^2 a(w)(z-w)^2 + \cdots$$

これと、

$$< a(z)a(w) >= \frac{1}{(z-w)^2}$$

より、式 (28) が得られる。

《(29) の証明》

Wick の定理の例を用いると、

$$
\begin{aligned}
T(z)T(w) &= \frac{1}{2} : a(z)^2 : \frac{1}{2} : a(w)^2 := \frac{1}{4} : a(z)^2 :: a(w)^2 : \\
&= \frac{1}{4} : a(z)^2 a(w) : + < a(z)a(w) > : a(z)a(w) : + \frac{1}{2} \cdot < a(z)a(w) >< a(z)a(w) > \\
&= \frac{1}{4} : a(z)^2 a(w)^2 : + \frac{1}{(z-w)^2} : a(z)a(w) : + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-w)^4} \\
&\sim \frac{1}{(z-w)^2} : (a(w) + \partial w a(w)(z-w)) a(w) : + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-w)^4} \\
&\sim \frac{1}{(z-w)^2} : a(w)^2 : + \frac{1}{(z-w)} : (\partial w a(w)) a(w) : + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-w)^4} \\
&\sim \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial w T(w)}{(z-w)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(z-w)^4}
\end{aligned}
$$

これより、式 (29) が得られる。 □

補題 6.26. (Fourier mode a_n, L_n 間の交換関係)

表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ 上で次の交換関係が成り立つ。

$$
[L_m, a(w)] = w^m \{ w \frac{d}{dw} + (m+1) \} \, a(w) \tag{30}
$$

$$
[L_m, T(w)] = w^m \{ w \frac{d}{dw} + 2(m+1) \} \, T(w) + \frac{m^3 - m}{12} w^{m-2} \tag{31}
$$

Proof.

《(30) の証明》

先の命題より、$T(z)a(w)$ は $|z| > |w| > 0$ で絶対収束する。

$$
T(z)a(w) = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} L_n a(w) z^{-n-2}
$$

なので、$z = w$ での積分を考えて、

$$
\begin{aligned}
\frac{-1}{2\pi i} \oint_{z=w} T(z)a(w) z^{m+1} dz &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{z=w} \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} L_n a(w) z^{m-n-1} dz \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{z^{-1}=0} \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} L_n a(w) (z^{-1})^{n-m-1} dz^{-1} \\
&= L_m a(w)
\end{aligned}
$$

従って、留数定理を使って計算すると、

$$
\begin{aligned}
L_m a(w) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{z=\infty} T(z)a(w)z^{m+1}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=0} T(z)a(w)z^{m+1}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=w} T(z)a(w)dz
\end{aligned}
$$

ここで、$z=0$ の周りでの積分は、領域 $|z|>|w|>0$ 上での積分なので、$a(w)T(z)$,$z=w$ の周りでの積分は、領域 $|w|>|z-w|>0$ 上での積分なので、$T(z)a(w)$ の OPE を利用すると、

$$
\begin{aligned}
L_m a(w) = &\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=0} a(w)T(z)z^{m+1}dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=w} \Big(\frac{a(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial w a(w)}{(z-w)}\Big)z^{m+1}dz \\
&= a(w)L_m + (m+1)w^m a(w) + w^{m+1}\partial w a(w) \\
&= a(w)L_m + w^m\left\{w\partial w + (m+1)\right\} a(w)
\end{aligned}
$$

が得られる。

《(31) の証明》

$T(z)T(w)$ は、$|z|>|w|>0$ で絶対収束するので、$z=w$ の周りでの積分を考える。

$$
\frac{-1}{2\pi i}\oint_{z=\infty} T(z)T(w)z^{m+1} = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{z=\infty} \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} L_n T(w) z^{m-n-1}dz
$$

ここで、$y=\dfrac{1}{z}$ とおくと、

$$
dy = \frac{-1}{z^2}dz \Longleftrightarrow dz = \frac{-1}{y^2}dy
$$

従って、上式は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{2\pi i}\oint_{z=\infty} T(z)T(w)z^{m+1}dy \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\oint_{y=0} \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} L_n T(w) y^{n-m-1} dy \\
&\quad = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} L_n T(w)\frac{1}{2\pi i} y^{n-m-1} dy = L_m T(w) \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\{\oint_{z=0} T(z)T(w)z^{m+1}dz + \oint_{z=w} T(z)T(w)z^{m+1}dz\} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\{\oint_{z=0} T(z)T(w)z^{m+1}dz + \oint_{z=w} (\frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial w T(w)}{z-w})\}\, dz \\
&\quad = T(w)L_m + \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=w} \frac{(m^3-m)w^{m-2}}{12(z-w)} dz + 2T(w)(m+1)w^m + \partial w T(w) w^{m+1}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\oint_{z=w} \frac{(m^3-m)w^{m-2}}{12(z-w)} dz \\
&= \frac{m^3-m}{12} w^{m-2} \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=w} \frac{1}{z-w} dz = \frac{m^3-m}{12} w^{m-2}\cdot 1 = \frac{m^3-m}{12} w^{m-2}
\end{aligned}
$$

となるので、これより (31) が得られる。 □

命題 6.27.

表現空間 $\mathcal{F}_\lambda$ 上で、次の交換関係が成り立つ。

$$[L_m, a_n] = -n a_{m+n} \tag{32}$$

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0} id \tag{33}$$

Proof.

《(32) の証明》

$$
\begin{aligned}
[L_m, a_n] &= w^m\{w\partial w a(w) + (m+1)a(w)\} \\
&\Longleftrightarrow [L_n, \Sigma a_n w^{-n-1}] \\
&= w^{m+1}\partial w(\Sigma a_n w^{-n-1}) + (m+1)w^m \Sigma a_n w^{-n-1} \\
&\Longleftrightarrow \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}[L_n, a_n]w^{-n-1} \\
&= w^{m+1}\Sigma a_n(-n-1)w^{-n-2} + (m+1)w^m\Sigma a_n w^{-n-1} \\
&= \Sigma a_n(-n-1)w^{m-n-1} + (m+1)\Sigma a_n w^{m-n-1} \\
&= \Sigma\{a_n(-n-1) + (m+1)a_n\}\, w^{m-n-1} \\
&= \Sigma a_n\{(-n-1) + (m+1)\}\, w^{m-n-1} \\
&= \Sigma a_n(m-n)w^{m-n-1} \\
&= \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} - n^{'} a_{n^{'}+m} w^{-n^{'}-1} \quad (m-n=n^{'}\text{とおく。})
\end{aligned}
$$

よって、示せた。

《(33) の証明》

$$[L_m, T(w)] = [L_m, \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} L_n w^{-n-2}] = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}[L_m, L_n]w^{-n-2}$$

従って、

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}[L_m, L_n]w^{-n-2} \\
&= w^m\{w\frac{d}{dw} + 2(m+1)\}\, T(w) + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= w^m\{w\frac{d}{dw} + 2(m+1)\}\Sigma L_n w^{-n-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= \{w^{m+1}\partial w + 2(m+1)w^m\}\Sigma L_n w^{-n-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= w^{m+1}\partial w \Sigma L_n w^{-n-2} + 2(m+1)w^m \Sigma L_n w^{-n-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= w^{m+1}\Sigma L_n(-n-2)w^{-n-3} + 2(m+1)w^m\Sigma L_n w^{-n-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= \Sigma L_n(-n-2)w^{m-n-2} + \Sigma(2m+2)L_n w^{m-n-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= \Sigma(2m-n)L_n w^{m-n-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2} \\
&= \Sigma(m-n^{'})L_{m+n^{'}} w^{-n^{'}-2} + \frac{m^3-m}{12}w^{m-2}
\end{aligned}
$$

よって、

$$\begin{aligned}&\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}[L_m, L_n]w^{-n-2}\\&=\{\Sigma(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}\}\,w^{m-2}\end{aligned}$$

が得られる。 □

式 (33) の交換関係は、Virasoro 代数と呼ばれる共形場理論において、重要な Lie 環の表現を意味する。命題6.27 の後半の交換関係は、$\mathcal{F}_\lambda$ 上定義された作用素 $\{L_n\}$ が Virasoro 代数の $c_v=1$ の表現を与える事を示している。また、Virasoro 代数 vir の表現における、vir の中心 c_v は、スカラー作用素として表現される。c_v の作用の値を中心電荷といい、$\mathcal{F}_\lambda$ は、中心電荷 1 の表現である。命題6.27 と同様の計算により $a(z)a(w)$ の OPE から、元の交換関係が次のように得られる。

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}id \tag{34}$$

$$[a_m, a(w)] = mw^{m-1} \tag{35}$$

つまり、作用素値関数の OPE と、その Fourier　mode の交換関係とは等価な式である。

7 Lepowsky-WilsonConstruction

ここでは、アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ で議論を進める。まず、$\mu\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned}e^{\mu x_0}:\mathcal{F}_\lambda &\longrightarrow \mathcal{F}_{\lambda+\mu}\\ v &\longmapsto e^{\mu x_0}v\end{aligned}$$

とすると、これは、左から $e^{\mu x_0}$ を掛ける演算子で、特に $\mathcal{F}_\lambda$ の最高ウェイトベクトル $|\lambda>$ は、$\mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ の最高ウェイトベクトル $|\lambda+\mu>$ に次の様に移る。

$$e^{\mu x_0}(|\lambda>) = e^{\mu x_0}e^{\lambda x_0} = e^{(\mu+\lambda)x_0} = |\lambda+\mu>$$

ここで、

$$\varphi(z) = x_0 + a_0 \log z - \Sigma_{z \neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} \tag{36}$$

とおくと、$\varphi(z)$ は $a(z)$ を、積分定数を x_0 として形式的に積分したものであり、

$$\partial \varphi(z) = a(z)$$

である。

定義 7.1. (頂点作用素 $V_\lambda(z)$ の定義)
$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、$V_\lambda(z)$ を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} V_\lambda(z) &\stackrel{\text{def}}{=} : e^{\lambda \varphi(z)} : \\ &= \exp(-\lambda \Sigma_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}) e^{\lambda x_0} \exp(\lambda a_0 \log z) \exp(-\lambda \Sigma_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}) \end{aligned}$$

これを、重さ λ のボゾン場の頂点作用素という。($V_\lambda(z)$ は、各 μ に対して、$\mathcal{F}_\lambda$ から $\mathcal{F}_{\lambda+\mu}[[z, z^{-1}]] z^{\lambda\mu}$ への作用素とみなす。

命題 7.2. ($V_\lambda(z)V_\mu(w)$, $a(z)V_\lambda(w)$, $T(z)V_\lambda(w)$ の展開
$V_\lambda(z)V_\mu(w)$, $a(z)V_\lambda(w)$, $T(z)V_\lambda(w)$ は、いずれも作用素値関数の意味で、領域 $|z| > |w| > 0$ で収束し、$z = w$ の周りで次の様に展開する。

$$V_\lambda(z)V_\mu(w) = (z-w)^{\lambda\mu} : V_\lambda(z)V_\mu(w) : \tag{37}$$

$$a(z)V_\lambda(w) = \frac{\lambda}{z-w} V_\lambda(w) + : a(z)V_\lambda(w) : \tag{38}$$

$$T(z)V_\lambda(w) \sim \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2} V_\lambda(w) + \frac{1}{z-w} \partial w V_\lambda(w) \tag{39}$$

Proof.
《(37) の証明》

$$\begin{aligned} &< \varphi | V_\lambda(z) V_\mu(w) | u > \\ &= \{ < \varphi | \exp(-\lambda \Sigma_{m<0} \frac{a_m}{m} z^{-m}) e^{\lambda x_0} z^{\lambda a_0} \exp(-\lambda \Sigma_{m>0} \frac{a_m}{m} z^{-m}) \} \\ &\times \{ \exp(-\mu \Sigma_{n<0} \frac{a_n}{n} z^{-n}) e^{\mu x_0} z^{\mu a_0} \exp(-\mu \Sigma_{n>0} \frac{a_n}{n} z^{-n}) | u > \} \end{aligned}$$

これを正規順序に直す。まず、

$$m+n\neq 0\text{ ならば、}[a_m,a_n](m\delta_{m+n,0})=0$$

である事にに注意すると、

$$\exp(-\lambda\Sigma_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m})=\Pi_{m>0}\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}),$$
$$\exp(-\mu\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n})=\Pi_{n>0}\exp(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n})$$

であり、$m+n\neq 0$ の時、

$$\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})\exp(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n})=\exp(-\mu\frac{a_n}{n}w^{-n})\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})$$

なので、$m+n=0,$ つまり $m=-n$ の時、各 m に対して $\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})\exp(-\mu\frac{a_{-m}}{-m}w^{m})$ の順番を入れ替えた時どうなるかを考える。ここで、Campbell-Hausdorf の公式

$$e^Xe^Y=e^{(X+Y)+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[[X,Y],Y]-\frac{1}{12}[[X,Y],X]} \tag{40}$$

において、$X=-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m}, Y=\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m$ とすると、

$$\begin{aligned}&[-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m},\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m]\\&=-\lambda\mu\frac{1}{m}z^{-m}w^m\cdot 1\cdot c=-\lambda\mu\frac{1}{m}(\frac{w}{z})^m c\end{aligned}$$

となり、これは、$\mathcal{B}$ の中心

$$z(\mathcal{B})=\{b\in\mathcal{B}|[b,a]=0,\quad {}^\forall a\in\mathcal{B}\}$$

に含まれるので、Campbell-Hausdorf の公式で、$[X,Y]$ の交換子を含む指数の第 3 以降の項は、全て 0 となる。従って、

$$\begin{aligned}&\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})\exp(\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m)\\&=\exp[-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m},\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m]\exp(\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m)\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})\\&=\exp(-\lambda\mu\frac{1}{m}(\frac{w}{z})^m)\exp(\mu\frac{a_{-m}}{m}w^m)\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})\end{aligned}$$

なので、全ての $m>0, n<0$ について掛け合わせて、

$$\begin{aligned}
&\exp(-\lambda\Sigma_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m})\exp(-\mu\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})\\
&=\Pi_{m>0}\exp(-\lambda\mu\frac{1}{m}(\frac{w}{z})^m)\Pi_{n<0}\\
&\times\exp(-\mu\frac{a_n}{n}z^{-n})\Pi_{m>0}\exp(-\lambda\frac{a_m}{m}z^{-m})
\end{aligned}$$

となる。ここで、テーラー展開

$$\log(1+x)=\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
&\Pi_{m>0}\exp(-\lambda\mu\frac{1}{m}(\frac{w}{z})^m)\\
&=\exp(\Sigma_{m>0}-\lambda\mu\frac{1}{m}(\frac{w}{z})^m)=\exp(\lambda\mu\log(1-(\frac{w}{z})))\\
&=(1-(\frac{w}{z}))^{\lambda\mu}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
&\exp(-\lambda\Sigma_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m})\exp(-\mu\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})\\
&=(1-(\frac{w}{z}))^{\lambda\mu}\exp(-\mu\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}w^{-n})\exp(-\lambda\Sigma_{m>0}\frac{a_m}{m}z^{-m})
\end{aligned}$$

となる。同様に、Campbell-Hausdorf の公式より、

$$z^{\lambda a_0}e^{\mu x_0}=e^{\mu x_0}z^{\lambda a_0}z^{\lambda\mu[a_0,x_0]}=e^{\mu x_0}z^{\lambda a_0}z^{\lambda\mu}$$

となる。

《(38) の証明》
各 m について、 $:a_m z^{-m-1}V_\lambda(w):$ は次の様になる。

$$\begin{aligned}
&:a_m z^{-m-1}V_\lambda(w): \qquad (41)\\
&=\begin{cases}
\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})a_m z^{-m-1}e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n}) & (m<0)\\
\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})e^{\lambda x_0}a_0 z^{-1}w^{\lambda a_0}\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n}) & (m=0)\\
\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})e^{\lambda x_0}w^{\lambda a_0}\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n})a_m z^{-m-1} & (m>0).
\end{cases}
\end{aligned}$$

これより、$m>0$ について、a_m と $\exp(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m)$ の順序と、a_0 と $e^{\lambda x_0}$ の順序が入れ替わるの　で、それを計算すればよい。

ここで、以下の関係が成り立つ。

$$e^X Y^{-X} = e^{\mathrm{ad}(X)}(Y) = \Sigma\frac{1}{n!}(\mathrm{ad}\,X)^n(Y)$$

また、

$$(\mathrm{ad}\,X)^n(Y) = \big[X,[X,[X,[X,\cdots,[X,Y]\big]$$

である。これより、

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda x_0}a_0 z^{-1}e^{\lambda x_0} = e^{\mathrm{ad}(-\lambda x_0)}a_0(z^{-1})\\
&= \Sigma_{n\geq 0}(\mathrm{ad}\,x_0)^n(a_0 z^{-1}) = a_0 z^{-1} + \lambda z^{-1}\\
&\Longleftrightarrow a_0 z^{-1}e^{\lambda x_0} = e^{\lambda x_0}a_0 z^{-1} + \lambda z^{-1}e^{\lambda x_0}
\end{aligned}$$

が得られる。同様に、$m>0$ の時を考える。

$$\begin{aligned}
&\exp(-\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m)a_m z^{-m-1}\exp(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m)\\
&\quad = \exp(\mathrm{ad}(-\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m))a_m z^{-m-1}\\
&\quad = \Sigma_{n\geq 0}\frac{(\frac{-\lambda w^m}{m})^n}{n!}(\mathrm{ad}\,a_{-m})^n a_m z^{-m-1}\\
&\quad = a_m z^{-m-1} + (\frac{-\lambda w^m}{m})[a_{-m},a_m]z^{-m-1}\\
&\quad = a_m z^{-m-1} + (\frac{-\lambda w^m}{m})(-m)z^{-m-1}\\
&\quad = a_m z^{-m-1}\lambda z^{-1}\big(\frac{w}{z}\big)^m
\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
&a_m z^{-m-1}\exp(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m) = \exp(\lambda\frac{a_{-m}}{m}w^m)a_m z^{-m-1}\\
&\Longleftrightarrow a(z)V_\lambda(w)\\
&=: a(z)V_\lambda(w) : + \lambda z^{-1}\Sigma_{m\geq 0}\big(\frac{w}{z}\big)^m V_\lambda(w)\\
&=: a(z)V_\lambda(w) : + \frac{\lambda}{\lambda - w}V_\lambda(w)
\end{aligned}$$

《(39) の証明》
$T(z)$ の定義

$$:a(z)a(z):=2T(z)$$
$$a(z)a(z^{'})-\frac{1}{(z-z^{'})^2}=:a(z)a(z^{'}):$$

より、$\dfrac{a(z)a(z^{'})-1}{(z-z^{'})^2}$ は $z=z^{'}$ で正則であり、$z^{'}\longrightarrow z$ で $2T(z)$ に収束する。従って、

$$T(z)=\frac{1}{2}\lim_{z\to z^{'}}\left(a(z)a(z^{'})-\frac{1}{(z-z^{'})^2}\right)$$

であるので、これを使って計算する。$a(z)a(z^{'})V_\lambda(w)$ も、Wick の定理のように計算出来るので、

$$a(z)a(z^{'})V_\lambda(w)=a(z)(:a(z^{'})V_\lambda(w):+\frac{\lambda}{z^{'}-w}V_\lambda(w))$$

ここで、OPE より、

$$a(z)a(z^{'})\sim\frac{1}{(z-z^{'})^2}$$
$$a(z)V_\lambda(w)=\frac{\lambda}{z-w}V_\lambda(w)+:a(z)V_\lambda(w):$$

なので、

$$\begin{aligned}a(z)a(z^{'})V_\lambda(w)=&:a(z)a(z^{'})V_\lambda(w):+\frac{1}{(z-z^{'})^2}V_\lambda(w)\\&+\frac{\lambda}{z-w}:a(z^{'})V_\lambda(w):+\frac{\lambda^2}{(z-w)(z^{'}-w)}V_\lambda(w)\\&+\frac{\lambda}{z^{'}-w}:a(z)V_\lambda(w):\end{aligned}$$

となる。故に、

$$\begin{aligned}T(z)V_\lambda(w)&=\frac{1}{2}\lim_{z\to z^{'}}\{a(z)a(z^{'})V_\lambda(w)+\frac{1}{(z-z^{'})^2}V_\lambda(w)\}\\&=:T(z)V_\lambda(w):+\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{(z-w)^2}V_\lambda(w)+\frac{\lambda}{z-w}:a(z)V_\lambda(w):\end{aligned}$$

ここで、$a(z)$ を $z=w$ で展開した上で $\partial wV_{\lambda}(w)$ を考える。

$$\begin{aligned}
&\partial wV_{\lambda}(w)\\
&=\partial w\left\{\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})e^{\lambda x_0}a_0z^{-1}w^{\lambda a_0}\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n})\right\}\\
&=-\lambda\Sigma_{n<0}a_nw^{-n}\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})e^{\lambda x_0}a_0z^{-1}w^{\lambda a_0}\\
&\times\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n})\\
&+\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})e^{\lambda x_0}a_0z^{-1}\lambda a_0w^{-1}w^{\lambda a_0}\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n})\\
&+\exp(-\lambda\Sigma_{n<0}\frac{a_n}{n}z^{-n})e^{\lambda x_0}a_0z^{-1}w^{\lambda a_0}(-\lambda\Sigma_{n>0}a_nw^{-n})\\
&\times\exp(-\lambda\Sigma_{n>0}\frac{a_n}{n}z^{-n})\\
&=\lambda:a(w)V_{\lambda}(w):
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
T(z)V_{\lambda}(w)\sim\frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_{\lambda}(w)+\frac{1}{z-w}:a(w)V_{\lambda}(w):\\
=\frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_{\lambda}(w)+\frac{1}{z-w}\partial wV_{\lambda}(w)
\end{aligned}$$

□

定義 7.3. $(\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1,\mathrm{H}(z),\mathrm{E}(z),\mathrm{F}(z)$ の定義$)$
ベクトル空間 $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ と、その上の作用素値有理関数 $\mathrm{H}(z),\mathrm{E}(z),\mathrm{F}(z)$ を次の様に定義する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_{\sqrt{2}n}\\
\mathcal{H}_1&=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})}\\
\mathrm{H}(z)&=\sqrt{2}a(z)\\
\mathrm{E}(z)&=V_{\sqrt{2}}(z)\\
\mathrm{F}(z)&=V_{-\sqrt{2}}(z)
\end{aligned}$$

また、$\mathrm{H}(z),\mathrm{E}(z),\mathrm{F}(z)$ の Fourier　mode 展開を次のように定める。

$$\mathrm{H}(z)=\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{H}(n)z^{-n-1}$$
$$\mathrm{E}(z)=\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{E}(n)z^{-n-1}$$
$$\mathrm{F}(z)=\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{F}(n)z^{-n-1}$$

ここで、$\mathrm{H}(z),\mathrm{E}(z),\mathrm{F}(z)$ の OPE は次の様になる。

$$\mathrm{H}(z_1)\mathrm{E}(z_2)=\sqrt{2}a(z_1)V_{\sqrt{2}}(z_2)=\frac{\sqrt{2}}{z_1-z_2}V_{\sqrt{2}}(z_2)+:a(z_1)V_{\sqrt{2}}(z_2):$$
$$\mathrm{H}(z_1)\mathrm{F}(z_2)=\sqrt{2}a(z_1)V_{-\sqrt{2}}(z_2)=\frac{-\sqrt{2}}{z_1-z_2}V_{-\sqrt{2}}(z_2)+:a(z_1)V_{-\sqrt{2}}(z_2):$$
$$\mathrm{E}(z)\mathrm{F}(z)=\frac{1}{(z_1-z_2)^2}:V_{\sqrt{2}}(z_1)V_{-\sqrt{2}}(z_2):$$

定理 7.4.

1. X,Y を H,E,F のいずれかとすると、次の関係が成り立つ。

$$X(z)Y(w)\sim\frac{(X|Y)}{(z-w)^2}id+\frac{1}{z-w}[X,Y](w) \tag{42}$$

$$T(z)X(w)\sim\frac{1}{(z-w)^2}X(w)+\frac{1}{z-w}\partial wX(w) \tag{43}$$

ここで、$[X,Y]$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の交換子であり、また、$(X|Y)=^t(XY)$ である。

2.

$$X(n)\longrightarrow X(n)$$
$$d\longmapsto -L_0$$
$$K\longmapsto lid$$

の対応により、次の交換関係が成立する。

$$[X(m),Y(n)]=[X,Y](m+n)+m\delta_{m+n,0}(X|Y)id \tag{44}$$

$$[L_m,X(n)]=-nX(m+n) \tag{45}$$

式 (44) は、上で構成した $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ が、$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のレベル 1 の表現であることを意味する。

Proof.

《(43) の証明》

$T(z)a(w)$ の singular　part より、

$$T(z)a(w) \sim a(w)T(z) \sim \frac{a(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}\partial w a(w)$$

なので、$X(w) = \mathrm{H}(w)$ の時は明らか。また、

$$T(z)V_\lambda(w) \sim \frac{\lambda^2}{2(z-w)^2}V_\lambda(w) + \frac{1}{z-w}\partial w V_\lambda(w) \tag{46}$$

より、$\mathrm{E}(z) = V_{\sqrt{2}}(z), \qquad \mathrm{F}(z) = V_{-\sqrt{2}}(z)$ の時も明らかである。

《(42) の証明》

・$X = H$ の時も自明である。

・$X = E, Y = F$ の時を考える。まず、

$$E(z)F(w) = \frac{1}{(z-w)^2} : V_{\sqrt{2}}(z)V_{-\sqrt{2}}(z) :$$

である。ここで、$V_{\sqrt{2}}(z)$ を $z = w$ で展開すると、

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{2}}(z) &= V_{\sqrt{2}}(w) + (z-w)\partial w V_{\sqrt{2}}(w) + \frac{1}{2}(z-w)^2 \partial w \cdot \partial w V_{\sqrt{2}}(w) \\ &= V_{\sqrt{2}}(w) + (z-w)\sqrt{2} : a(z)V_{\sqrt{2}}(w) : \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} : V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w) : &=: e^{\sqrt{2}\varphi(w)}e^{-\sqrt{2}\varphi(w)} : \\ &=: e^{\sqrt{2}\varphi(w)+(-\sqrt{2}\varphi(w))} := 1 \end{aligned}$$

また、

$$(E|F) = 1, \quad [X,Y](w) = [E,F](w) = H(w), \quad : V_{\sqrt{2}}(z)V_{-\sqrt{2}}(z) := 1$$

であるので、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(z)\mathrm{F}(w) &\sim (z-w^{-2}) : \{V_{\sqrt{2}}(w) + (z-w^{-1})\sqrt{2} : a(z)V_{\sqrt{2}}(w) : \}\, V_{-\sqrt{2}}(w) : \\
&= (z-w^{-2}) : V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w) : \\
&\qquad + \frac{\sqrt{2}}{z-w} : \sqrt{2}a(w)V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w) : \\
&= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\sqrt{2}}{z-w} : a(w)V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w) : \\
&= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\sqrt{2}}{z-w}a(w) : V_{\sqrt{2}}(w)V_{-\sqrt{2}}(w) : \\
&= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\sqrt{2}}{z-w}a(w) \\
&= \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{\sqrt{2}}{z-w}H(w) \\
&= \frac{(E|F)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}[E,F](w)
\end{aligned}
$$

が得られる。 □

以下、$H(0), L_0$ が $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 上でどの様に作用しているかを調べる。

命題 7.5. ($H(0), L_0$ の作用)

$H(0), L_0$ は、$\mathcal{F}_\lambda$ の d 次部分空間 $\mathcal{F}_\lambda(d)$ 上、次の様に作用する。

$$H(0) = \sqrt{2}a_0 = \sqrt{2}\lambda id \tag{47}$$

$$L_0 = \frac{1}{2} + \Sigma_{n\geq 1}a_{-n}a_n = \Big(\frac{1}{2}\lambda^2 + d\Big)id \tag{48}$$

特にこれらは、$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 上、対角型で作用する。

$$H(0) = \begin{cases} 2nid & (on\mathcal{F}_{\sqrt{2}n}) \\ (2n+1) & (on\mathcal{F}_{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})}) \end{cases}$$

$$L_0 = \begin{cases} (n^2+d)id & (on\mathcal{F}_{\sqrt{2}n}) \\ \big((n^2+\frac{1}{2})+d\big) & (on\mathcal{F}_{\sqrt{2}(n+\frac{1}{2})}) \end{cases}$$

Proof.

$\mid \lambda >\in \mathcal{F}$ と $^{\forall}n > 0$ に対して、

$$a_n \mid \lambda >= 0, a_0|\lambda\rangle = \lambda \mid \lambda > \tag{49}$$

より、

$$L_0 \mid \lambda >= \frac{1}{2}\lambda^2 \mid \lambda > \tag{50}$$

を得る。命題6.11 と、命題6.7 より、$\mathcal{F}_\lambda(d)$ は、$a_{-1}^{m_1}a_{-2}^{m_2}\cdots \mid \lambda > (\Sigma_j jm_j = d)$ で張られる。

《(47) の証明》

$$\begin{aligned}&H(z) = \Sigma H(n)z^{-n-1} = \sqrt{2}a(z) = \Sigma\sqrt{2}a(n)z^{-n-1}\text{より、}\\&H(0) = \sqrt{2}a(0) = \sqrt{2}\lambda id\end{aligned}$$

である。

《(48) の証明》

まず、

$$\begin{aligned}T(z) &= \Sigma L_n z^{-n-2}\\&= \frac{1}{2} : a(z)a(z) :\\&= \frac{1}{2} : \Sigma a_n z^{-n-1} a_n z^{-n-1} :\\&= \frac{1}{2} : \Sigma a_k a_l : z^{-k-l-2}\\&= \frac{1}{2} : \Sigma_{(k+l=n, \quad k,l\in\mathbb{Z})} a_k a_l : z^{-n-2}\end{aligned}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{2}\Sigma_{k\in\mathbb{Z}} : a_k a_{-k} : \\
&= \frac{1}{2}\big(\Sigma_{k<0} a_k a_{-k} + \Sigma_{k\geq 0} a_k a_{-k}\big) \\
&= \frac{1}{2} a_0 a_0 + \Sigma_{k\geq 1} a_k a_{-k} (\Sigma_{k<0} a_k a_{-k}) \\
&= \Sigma_{k\geq 1} a_k a_{-k}, \Sigma_{k\geq 0} a_k a_{-k} \\
&= a_0 a_0 + \Sigma_{k\geq 1} a_k a_{-k} \text{より} \\
&\longrightarrow \frac{1}{2} a_0^2 + \Sigma_{n\geq 1} a_n a_{-n} \qquad \text{であり、}
\end{aligned}
$$

さらに、

$$[L_0, a_{-n}] = -na_n \text{と、} L_0 \mid \lambda >= \frac{1}{2}\lambda^2 \mid \lambda > \qquad \text{であることから、}$$

$$L_0 a_{-n} \mid \lambda >= [L_0, a_{-n}] \mid \lambda > +a_{-n} L_0 \mid \lambda >= (\frac{1}{2}\lambda^2 + d) a_{-n}$$

が得られる。 □

命題 7.6. ($\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ の指標)

ベクトル空間 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ の母関数 $\mathrm{ch}\,\mathcal{H}_0, \mathrm{ch}\,\mathcal{H}_1$ は次の様になる。

$$\mathrm{ch}\,\mathcal{H}_0 = \Sigma z^{2n} q^{n^2} \Pi_{i\geq 1} (1-q^i)^{-1} \tag{51}$$

$$\mathrm{ch}\,\mathcal{H}_1 = \Sigma z^{(2n+1)} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \Pi_{i\geq 1} (1-q^i)^{-1} \tag{52}$$

Proof.
《(51) の証明》

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\sqrt{2}n} \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}(d) \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{d\geq 0} \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots] e^{\sqrt{2}nx_0} \mid \sqrt{2}n > (d) \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{d\geq 0} \{v \in \mathcal{F}_{\sqrt{2}n} \mid \deg v = d\} \\
&= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \bigoplus_{d\geq 0} \mathrm{span}\, \{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots \mid \sqrt{2}n > \mid \Sigma j m_j = d\}
\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}\,\mathcal{H}_0 \\
&= \Sigma_{n,d} z^{2n} q^{n^2+d} \dim \mathcal{H}_0[2n, n^2+d] \\
&= \Sigma_n z^{2n} \Sigma_d q^{n^2+d} \dim \mathcal{H}_0[2n, n^2+d]
\end{aligned}$$

さらに、

$\dim \mathcal{H}_0[2n, n^2+d] \subset \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}$、

$\Sigma_d q^{n^2+d} \dim \mathcal{H}_0[2n, n^2+d] \subset \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}$であり、

$\mathrm{ch}\,\mathcal{F}_{\sqrt{2}n} = \Sigma_d q^{n^2+d} \dim \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}[n^2+d]$ である。

また、

$\mathcal{F}_{\sqrt{2}n}[n^2+d] = \mathcal{H}_0[2n, n^2+d]$

$= \{v \in \mathcal{F}_{\sqrt{2}n} | L(0)v = (n^2+d)v\}$ となる。

ここで、L_0 の固有値は $h = (n^2+d)id$、　$H(0)$ の固有値は $\lambda = 2nid$ なので従って、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}\,\mathcal{H}_0 = \Sigma_n z^{2n}\, \mathrm{ch}\,\mathcal{F}_{\sqrt{2}n} = \Sigma_n z^{2n} \Sigma_h q^h \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}[h] \\
&= \Sigma_{n,h} z^{2n} q^h \{v \in \mathcal{F}_{\sqrt{2}n} | L(0)v = hv\} = \Sigma_{n,h} z^{2n} q^h \mathcal{F}_{\sqrt{2}n}(d - n^2) \\
&= \Sigma_n z^{2n} q^{n^2}\, \mathrm{ch}\,\mathcal{F}_0 = \Sigma z^{2n} q^{n^2} \frac{1}{\Pi_{i\geq 1}(1 - q^i)}
\end{aligned}$$

同様にして、$\mathrm{ch}\,\mathcal{H}_1$ も求められる。 □

定理 7.7.

以上より、$\mathcal{L}_0 \simeq \mathcal{H}_0$、$\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{H}_1$ であることが分かり、表現の構成が出来た。

ここまで論じてきた事は、様々な計算をする上で非常に有用な結果である。